BASIC問題

1 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x+\int_0^1 f(t)e^t dt$$

2 次の等式を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

$$\int_\pi^x f(t)dt=a\sin^2 x+\frac{a}{2}x^2-1$$

3 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}$$

4 原点から出発して数直線上を動く点Pの t 秒後の座標が t^3-5t^2+4t で表される。

(1) Pが原点に戻ったときの速度をすべて求めよ。

(2) Pが運動の向きを初めて変えるのは何秒後か。

STANDARD問題

5 座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が，$x=-6t^2+10$，$y=2t^3-5$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までにPが通過する道のり s を求めよ。

6 自然数 n について，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ とする。

(1) I_1，I_2 を求めよ。

(2) I_{n+2} を n と I_n を用いて表せ。

(3) I_6 を求めよ。

実戦問題

7 曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の $a\leqq x\leqq a+1$ の部分の長さを $L(a)$ とするとき，$L(a)$ の最小値を求めよ。

8 曲線 $y=\log x$ と x 軸，y 軸および直線 $y=10$ で囲まれる部分を，y 軸の周りに1回転させてできる容器に毎秒 v の水を入れる。

(1) 水の深さが h のときの，水の体積を求めよ。

(2) 水の深さが h のときの，水面の上昇速度を求めよ。

9 中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を，xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点Pが原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点Pの座標を求めよ。

(2) (1)において，t が0から 2π まで動いて円が1回転したときの点Pの描く曲線を C とする。曲線 C の長さを求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　$f(x)=x-\dfrac{1}{e-2}$

$\boxed{2}$ 解答　$f(x)=\dfrac{2}{\pi^2}(\sin 2x+x)$，$a=\dfrac{2}{\pi^2}$

$\boxed{3}$ 解答　$\dfrac{1}{2}\log 2$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　-3，12　　(2)　$\dfrac{5-\sqrt{13}}{3}$ 秒後

$\boxed{5}$ 解答　$16(2\sqrt{2}-1)$

$\boxed{6}$ 解答　(1)　$I_1=\dfrac{1}{2}\log 2$，$I_2=1-\dfrac{\pi}{4}$　　(2)　$I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$　　(3)　$\dfrac{13}{15}-\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{7}$ 解答　$a=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{e-1}{\sqrt{e}}$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$\dfrac{\pi}{2}(e^{2h}-1)$　　(2)　$\dfrac{v}{\pi e^{2h}}$

$\boxed{9}$ 解答　(1)　$(at-a\sin t,\ a-a\cos t)$　　(2)　$3\pi a^2$　　(3)　$8a$

$\boxed{1}$　$\displaystyle\int_0^1 f(t)e^t dt$ は定数であるから a とおくと　　$f(x)=x+a$　……①

よって　　$\displaystyle\int_0^1(t+a)e^t dt=\int_0^1(t+a)(e^t)'dt=\Big[(t+a)e^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t dt$

$$=\{(1+a)e-a\}-\Big[e^t\Big]_0^1=(e-1)a+1$$

これより，$a=(e-1)a+1$ であるから　　$a=-\dfrac{1}{e-2}$

これを ① に代入して　　$f(x)=x-\dfrac{1}{e-2}$

$\boxed{2}$　等式の両辺を x で微分すると　　$f(x)=2a\sin x\cos x+ax=a\sin 2x+ax$

与えられた等式で $x=\pi$ とおくと　　$0=\dfrac{\pi^2}{2}a-1$　すなわち　$a=\dfrac{2}{\pi^2}$

したがって　　$f(x)=\dfrac{2}{\pi^2}(\sin 2x+x)$

$\boxed{3}$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log|x^2+1|\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

$\boxed{4}$ (1)　$f(t)=t^3-5t^2+4t$ とすると　　$f'(t)=3t^2-10t+4$

また，$t^3-5t^2+4t=t(t^2-5t+4)=t(t-1)(t-4)$ であるから，$f(t)=0$ の解は

　$t=0$，1，4

ゆえに，点 P は 1 秒後と 4 秒後に原点に戻る。

よって，$t=1$ のときの速度は　　$f'(1)=-3$

$t=4$ のときの速度は　　$f'(4)=12$

(2)　$f'(t)=0$ とすると　　$t=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{3}$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{5-\sqrt{13}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{5+\sqrt{13}}{3}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	0	↗	極大	↘	極小	↗

よって，運動の向きを初めて変えるのは　　$\dfrac{5-\sqrt{13}}{3}$ 秒後

5　$\dfrac{dx}{dt}=-12t$，$\dfrac{dy}{dt}=6t^2$ であるから

$$s=\int_0^2\sqrt{(-12t)^2+(6t^2)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{144t^2+36t^4}\,dt=6\int_0^2 t\sqrt{t^2+4}\,dt$$

$t^2+4=u$ とおくと　　$2tdt=du$

t と u の対応は右のようになる。

t	$0\longrightarrow 2$
u	$4\longrightarrow 8$

よって　　$s=6\displaystyle\int_0^2 t\sqrt{t^2+4}\,dt=3\int_0^2\sqrt{t^2+4}\cdot 2tdt$

$$=3\int_4^8\sqrt{u}\,du=\Big[2u\sqrt{u}\Big]_4^8=16(2\sqrt{2}-1)$$

6　(1)　$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\log 2$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$$

(2)　$I_{n+2}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot(\tan x)'dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n=\frac{1}{n+1}-I_n$$

よって　　$I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$

(3)　(1)，(2) から　　$I_6=\dfrac{1}{5}-I_4=\dfrac{1}{5}-\left(\dfrac{1}{3}-I_2\right)=-\dfrac{2}{15}+\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{13}{15}-\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{7}$ $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ から　　$y'=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

ゆえに　　$1+(y')^2=1+\dfrac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2=\dfrac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$

よって　　$L(a)=\displaystyle\int_a^{a+1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_a^{a+1}(e^x+e^{-x})dx$

$$=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_a^{a+1}=\frac{1}{2}\{(e^{a+1}-e^a)-(e^{-a-1}-e^{-a})\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(e-1)e^a+(e-1)e^{-a-1}\}=\frac{e-1}{2}(e^a+e^{-a-1})$$

$e^a>0$，$e^{-a-1}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$L(a)\geqq\frac{e-1}{2}\cdot2\sqrt{e^a\cdot e^{-a-1}}=\frac{e-1}{\sqrt{e}}$$

等号は，$e^a=e^{-a-1}$ すなわち $a=-\dfrac{1}{2}$ のとき成り立つ。

したがって　　$a=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{e-1}{\sqrt{e}}$

$\boxed{8}$ t 秒後の水の深さを h，体積を V とする。

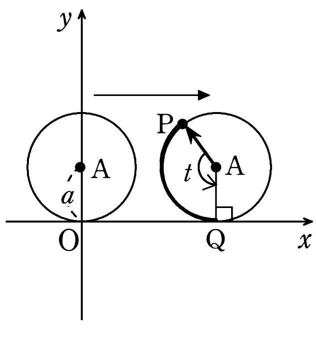
(1)　$y=\log x$ から　　$x=e^y$

よって　　$V=\pi\displaystyle\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h e^{2y}dy=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^h=\frac{\pi}{2}(e^{2h}-1)$

(2)　$V=\dfrac{\pi}{2}(e^{2h}-1)$ の両辺を t で微分すると　　$\dfrac{dV}{dt}=\pi e^{2h}\dfrac{dh}{dt}$

$\dfrac{dV}{dt}=v$ であるから，求める水面の上昇速度は　　$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{v}{\pi e^{2h}}$

$\boxed{9}$ (1)　円の中心を A，円 と x 軸の接点を Q とおく。



$\mathrm{OQ}=\overset{\frown}{\mathrm{QP}}$ であるから　　$\mathrm{OQ}=at$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(at,\ a)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と x 軸の正の向きとのなす角は　　$\dfrac{3}{2}\pi-t$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(a\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-t\right),\ a\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-t\right)\right)$

$$=(-a\sin t,\ -a\cos t)$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$=(at,\ a)+(-a\sin t,\ -a\cos t)=(at-a\sin t,\ a-a\cos t)$$

すなわち点 P の座標は　　$(at-a\sin t,\ a-a\cos t)$

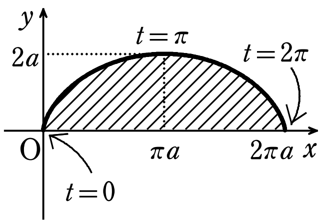
(2)　P の座標を $(x,\ y)$ とおくと　　$x=at-a\sin t$，$y=a-a\cos t$

$t=0$ のとき　$(x,\ y)=(0,\ 0)$，　　$t=2\pi$ のとき　$(x,\ y)=(2\pi a,\ 0)$

$\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$ であるから

$0<t<\pi$ のとき　$\dfrac{dx}{dt}>0$，$\dfrac{dy}{dt}>0$　　$\pi<t<2\pi$ のとき　$\dfrac{dx}{dt}>0$，$\dfrac{dy}{dt}<0$

よって，曲線 C の概形は右の図のようになり，求める面積は斜線部分の面積である。ゆえに，求める面積は



$$\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}(\cos^2 t-2\cos t+1)dt$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}-2\cos t+1\right)dt=a^2\left[\frac{\sin 2t}{4}-2\sin t+\frac{3}{2}t\right]_0^{2\pi}$$
$$=3\pi a^2$$

(3)　求める曲線の長さを L とおく。

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t$$
$$=a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)$$
$$=2a^2(1-\cos t)=4a^2\frac{1-\cos t}{2}=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ のとき，$\sin\frac{t}{2}\geqq 0$ であるから

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a$$

参考　$a>0$，t を媒介変数として，方程式 $x=a(t-\sin t)$，　$y=a(1-\cos t)$ で表される曲線をサイクロイドという。