

BASIC問題

1 次の2次方程式を解け。

(1) $6x^2 - 5x - 6 = 0$

(2) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2 次の不等式を解け。

(1)
$$\begin{cases} 4x + 1 < 3x - 1 \\ 2x - 1 \geq 5x + 6 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} 2x + 3 > x + 2 \\ 3x > 4x + 2 \end{cases}$$

(3) $2(x-3) + 5 < 5x - 6 \leq \frac{3x+4}{3}$

3 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x-1|=2$

(2) $|x+4|<5$

(3) $|2x-3|\geq 4$

4 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{27}} - \frac{1}{\sqrt{12}}$

5 実数 x, y が $x+y=3, xy=-2$ を満たすとき， $x^2+y^2, x^3+y^3, x^5+y^5$ の値を求めよ

6 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$

(2) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}$

(3) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

STANDARD問題

7 a を定数とするとき，次の不等式を解け。

(1) $ax \leq 1$

(2) $ax+6 > 3x+2a$

8 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3 - a^2c - ab^2 + b^2c$

(2) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 7y - 3$

9 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x-3|=2x$

(2) $|x-3|<2x$

(3) $|x|+|x-2|=6$

10 $\frac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ の分母を有理化せよ。

11 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ のとき， $x^2+\frac{1}{x^2}, x^4+\frac{1}{x^4}, x^6+\frac{1}{x^6}$ の値を求めよ。

実戦問題篇

12 a を定数とするとき，次の方程式を解け。

(1) $ax^2+(a^2-1)x-a=0$

(2) $a^2x+1=a(x+1)$

13 * $2^{18}-1$ を素数の積で表したとき，そこに現れる素数の中で最大なものを求めよ。

14 * 相異なる実数 α, β が
$$\begin{cases} \alpha^2 + \sqrt{3}\beta = \sqrt{6} \\ \beta^2 + \sqrt{3}\alpha = \sqrt{6} \end{cases}$$
 を満たすとき， $\alpha+\beta, \alpha\beta, \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ の値を

求めよ。

15 $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数の部分を a ，小数の部分を b とする。

(1) a と b を求めよ。

(2) $a+2b+b^2+1$ の値を求めよ。

16 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x+2|-|x-1|>x$

(2) $||x-1|-2|-3=0$

17 x の連立不等式 $\begin{cases} 7x-5>13-2x \\ x+a\geq 3x+5 \end{cases}$ を満たす整数 x がちょうど5個存在するとき，定数 a

の値の範囲を求めよ。

1 解答 (1) $x = \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}$ (2) $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2 解答 (1) $x \leq -\frac{7}{3}$ (2) 解はない (3) $\frac{5}{3} < x \leq \frac{11}{6}$

3 解答 (1) $x = 3, -1$ (2) $-9 < x < 1$ (3) $x \leq -\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \leq x$

4 解答 (1) $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{5\sqrt{3}}{18}$

5 解答 $x^2 + y^2 = 13, x^3 + y^3 = 45, x^5 + y^5 = 573$

6 解答 (1) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ (2) $3 - \sqrt{6}$ (3) $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$

7 解答 (1) $a > 0$ のとき $x \leq \frac{1}{a}$
 $a = 0$ のとき すべての実数
 $a < 0$ のとき $x \geq \frac{1}{a}$
 (2) $a > 3$ のとき $x > 2$
 $a = 3$ のとき 解はない
 $a < 3$ のとき $x < 2$

8 解答 (1) $(a+b)(a-b)(a-c)$ (2) $(x+2y-1)(2x-y+3)$

9 解答 (1) $x = 1$ (2) $x > 1$ (3) $x = -2, 4$

10 解答 $\frac{\sqrt{6} + 6 - \sqrt{42}}{12}$

11 解答 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10, x^4 + \frac{1}{x^4} = 98, x^6 + \frac{1}{x^6} = 970$

12 解答 (1) $a \neq 0$ のとき $x = -a, \frac{1}{a}$
 $a = 0$ のとき $x = 0$
 (2) $a \neq 0, a \neq 1$ のとき $x = \frac{1}{a}$
 $a = 0$ のとき 解はない
 $a = 1$ のとき すべての実数

13 解答 73

14 解答 順に, $\sqrt{3}, 3 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}$

15 解答 (1) $a = 3, b = \sqrt{3} - 1$ (2) 6

16 解答 (1) $x < -3, -1 < x < 3$ (2) $x = 6, -4$

17 解答 $19 \leq a < 21$

数学① 第1回試験 数と式①

① (1) 左辺を因数分解すると $(2x-3)(3x+2)=0$

よって $2x-3=0$ または $3x+2=0$

したがって $x=\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}$

$$\begin{array}{r} 2 \times -3 \rightarrow -9 \\ 3 \times 2 \rightarrow 4 \\ \hline 6 \quad -6 \quad -5 \end{array}$$

(2) 解の公式により $x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$

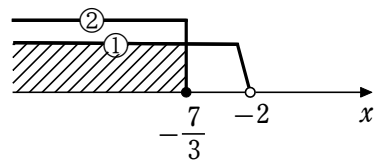
$$= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

別解 $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 2 \cdot 3}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

② (1) $4x+1 < 3x-1$ から $x < -2$ …… ①

$2x-1 \geq 5x+6$ から $-3x \geq 7$

よって $x \leq -\frac{7}{3}$ …… ②



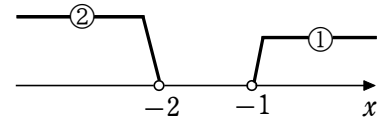
①と②の共通範囲を求めて $x \leq -\frac{7}{3}$

(2) $2x+3 > x+2$ から $x > -1$ …… ①

$3x > 4x+2$ から $-x > 2$

よって $x < -2$ …… ②

①と②の共通範囲はないから、この連立不等式の解はない。



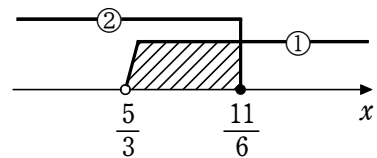
(3) $2(x-3)+5 < 5x-6$ から $-3x < -5$

よって $x > \frac{5}{3}$ …… ①

$5x-6 \leq \frac{3x+4}{3}$ から $15x-18 \leq 3x+4$

よって $12x \leq 22$

ゆえに $x \leq \frac{11}{6}$ …… ②



①と②の共通範囲を求めて $\frac{5}{3} < x \leq \frac{11}{6}$

③ (1) $|x-1|=2$ から $x-1=\pm 2$ よって $x=3, -1$

(2) $|x+4| < 5$ から $-5 < x+4 < 5$

各辺から4を引いて $-9 < x < 1$

(3) $|2x-3| \geq 4$ から $2x-3 \leq -4$ または $4 \leq 2x-3$

よって $2x \leq -1$ または $7 \leq 2x$ ゆえに $x \leq -\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \leq x$

④ (1) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$$= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{27}} - \frac{1}{\sqrt{12}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6}\right)\sqrt{3} \\
 &= \left(\frac{6}{18} + \frac{2}{18} - \frac{3}{18}\right)\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{5} \quad x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy = 3^2 - 2 \cdot (-2) = 13 \\
 x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 3^3 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 = 45 \\
 x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - (x^2y^3 + x^3y^2) = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - (xy)^2(x+y) \\
 &= 13 \cdot 45 - (-2)^2 \cdot 3 = 573
 \end{aligned}$$

別解 $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)\{(x^2 + y^2) - xy\} = 3\{13 - (-2)\} = 45$

$$\begin{aligned}
 \boxed{6} \quad (1) \quad \sqrt{9-2\sqrt{14}} &= \sqrt{(7+2)-2\sqrt{7 \cdot 2}} = \sqrt{7} - \sqrt{2} \\
 (2) \quad \sqrt{15-6\sqrt{6}} &= \sqrt{15-2\sqrt{54}} = \sqrt{(9+6)-2\sqrt{9 \cdot 6}} \\
 &= \sqrt{9} - \sqrt{6} = 3 - \sqrt{6} \\
 (3) \quad \sqrt{3-\sqrt{5}} &= \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{(5+1)-2\sqrt{5 \cdot 1}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

7 (1) [1] $a > 0$ のとき

両辺を正の数 a で割って $x \leq \frac{1}{a}$

[2] $a = 0$ のとき

与えられた不等式 $0 \cdot x \leq 1$ の解は
すべての実数

[3] $a < 0$ のとき

両辺を負の数 a で割って $x \geq \frac{1}{a}$

(2) 不等式を整理すると

$$(a-3)x > 2(a-3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

[1] $a-3 > 0$ すなわち $a > 3$ のとき

両辺を正の数 $a-3$ で割って $x > \frac{2(a-3)}{a-3}$

すなわち $x > 2$

[2] $a-3 = 0$ すなわち $a = 3$ のとき

不等式①は解がない。

[3] $a-3 < 0$ すなわち $a < 3$ のとき

両辺を負の数 $a-3$ で割って $x < \frac{2(a-3)}{a-3}$

すなわち $x < 2$

⑧ (1) 与式 $= (-a^2 + b^2)c + a(a^2 - b^2)$

$$= (a^2 - b^2)(a - c)$$

$$= (a + b)(a - b)(a - c)$$

(2) 与式 $= 2x^2 + (3y+1)x - (2y^2 - 7y + 3)$

$$= 2x^2 + (3y+1)x - (y-3)(2y-1)$$

$$= \{x + (2y-1)\}\{2x - (y-3)\}$$

$$= (x+2y-1)(2x-y+3)$$

$$\begin{array}{r} 1 \times 2y-1 \quad \longrightarrow 4y-2 \\ 2 \times -(y-3) \quad \longrightarrow -y+3 \\ \hline 2 \quad -(y-3)(2y-1) \quad 3y+1 \end{array}$$

⑨ (1) [1] $x-3 \geq 0$ すなわち $x \geq 3$ のとき

$|x-3| = x-3$ であるから、方程式は $x-3 = 2x$

これを解くと $x = -3$ これは $x \geq 3$ を満たさない。

[2] $x-3 < 0$ すなわち $x < 3$ のとき

$|x-3| = -(x-3)$ であるから、方程式は $-(x-3) = 2x$

これを解くと $x = 1$ これは $x < 3$ を満たす。

[1], [2] から、求める解は $x = 1$

【参考】 $|A| = B$ は「 $A = \pm B$ かつ $B \geq 0$ 」と同じであるから、次のように解くこともできる。

$|x-3| = 2x$ から $x-3 = \pm 2x$ かつ $2x \geq 0$

よって $x = -3, 1$ かつ $x \geq 0$ したがって $x = 1$

(2) [1] $x \geq 3$ のとき

不等式は $x-3 < 2x$ これを解くと $x > -3$

これと $x \geq 3$ の共通範囲は $x \geq 3$ ……①

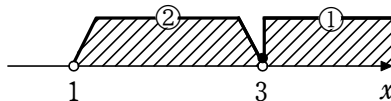
[2] $x < 3$ のとき

不等式は $-(x-3) < 2x$ これを解くと $x > 1$

これと $x < 3$ の共通範囲は

$$1 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

[1], [2] から, 求める解は ① と ② を合わせた範囲で $x > 1$



(3) [1] $x < 0$ のとき

$$|x| = -x, |x-2| = -(x-2) \text{ であるから, 方程式は } -x - (x-2) = 6$$

これを解くと $x = -2$ これは $x < 0$ を満たす。

[2] $0 \leq x < 2$ のとき

$$|x| = x, |x-2| = -(x-2) \text{ であるから, 方程式は } x - (x-2) = 6$$

すなわち $0 \cdot x = 4$ この方程式の解はない。

[3] $2 \leq x$ のとき

$$|x| = x, |x-2| = x-2 \text{ であるから, 方程式は } x + (x-2) = 6$$

これを解くと $x = 4$ これは $2 \leq x$ を満たす。

以上から, 求める解は $x = -2, 4$

$$\begin{aligned} \textcircled{10} \quad \frac{1}{1 + \sqrt{6} + \sqrt{7}} &= \frac{1 + \sqrt{6} - \sqrt{7}}{\{(1 + \sqrt{6}) + \sqrt{7}\}\{(1 + \sqrt{6}) - \sqrt{7}\}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{6} - \sqrt{7}}{(1 + \sqrt{6})^2 - (\sqrt{7})^2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{6} - \sqrt{7}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} + 6 - \sqrt{42}}{12} \end{aligned}$$

⑪ $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

よって $x + \frac{1}{x} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{3}$

ゆえに $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = (2\sqrt{3})^2 - 2 = 10$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 10^2 - 2 = 98$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 10^3 - 3 \cdot 10 = 970$$

別解 $x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^4 - 1 + \frac{1}{x^4}\right) = 10(98 - 1) = 970$

⑫ (1) $ax^2 + (a^2 - 1)x - a = 0$ から

$$(x + a)(ax - 1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

[1] $a \neq 0$ のとき

①の解は $x = -a, \frac{1}{a}$

[2] $a=0$ のとき

①は $x \cdot (-1) = 0$ となるから、解は
 $x = 0$

(2) $a^2x + 1 = a(x + 1)$ から

$$a(a-1)x = a-1 \quad \dots\dots \text{①}$$

$a(a-1) \neq 0$ すなわち $a \neq 0, a \neq 1$ のとき

$$x = \frac{1}{a}$$

$a=0$ のとき ①から $0 \cdot x = -1$

これを満たす x の値はない。すなわち、解はない。

$a=1$ のとき ①から $0 \cdot x = 0$

これはすべての数 x について成り立つから、解は
 すべての実数。

13 $a^{18} - b^{18} = (a^9)^2 - (b^9)^2 = (a^9 + b^9)(a^9 - b^9) = \{(a^3)^3 + (b^3)^3\} \{(a^3)^3 - (b^3)^3\}$
 $= (a^3 + b^3)^1 (a^6 - a^3b^3 + b^6)^1 (a^3 - b^3)(a^6 + a^3b^3 + b^6)$

この式で $a=2, b=1$ とおくと

$$2^{18} - 1 = (8+1)(64-8+1)(8-1)(64+8+1) = 9 \times 57 \times 7 \times 73 = 3^3 \times 7 \times 19 \times 73$$

よって、 $2^{18} - 1$ を素数の積で表したとき、そこに現れる素数の中で最大なものは 73 である。

14 $\alpha^2 + \sqrt{3}\beta = \sqrt{6} \quad \dots\dots \text{①}$

$$\beta^2 + \sqrt{3}\alpha = \sqrt{6} \quad \dots\dots \text{②}$$

① - ② より $\alpha^2 - \beta^2 - \sqrt{3}(\alpha - \beta) = 0$

整理すると $(\alpha - \beta)\{(\alpha + \beta) - \sqrt{3}\} = 0$

$\alpha \neq \beta$ から $\alpha + \beta - \sqrt{3} = 0$

したがって $\alpha + \beta = \sqrt{3}$

① + ② より $\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}(\alpha + \beta) = 2\sqrt{6}$

よって $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \sqrt{3}(\alpha + \beta) = 2\sqrt{6}$

ゆえに $(\sqrt{3})^2 - 2\alpha\beta + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$

したがって $\alpha\beta = 3 - \sqrt{6}$

$\alpha + \beta = \sqrt{3}, \alpha\beta = 3 - \sqrt{6}$ から

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(\sqrt{3})^2 - 2(3 - \sqrt{6})}{3 - \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6} - 3}{3 - \sqrt{6}}$$

$$= \frac{(2\sqrt{6} - 3)(3 + \sqrt{6})}{(3 - \sqrt{6})(3 + \sqrt{6})} = \frac{3 + 3\sqrt{6}}{9 - 6} = 1 + \sqrt{6}$$

$$\boxed{15} \quad (1) \quad \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}$$

$\sqrt{3} = 1.73\cdots$ であるから $2+\sqrt{3} = 3.73\cdots$

よって $a=3$,

$$b = (2+\sqrt{3}) - a = (2+\sqrt{3}) - 3 = \sqrt{3} - 1$$

$$\begin{aligned} (2) \quad a+2b+b^2+1 &= 3+2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2+1 \\ &= 3+2\sqrt{3}-2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2+1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{別解}} \quad a+2b+b^2+1 &= a+(b+1)^2 \\ &= 3+(\sqrt{3}-1+1)^2 \\ &= 3+(\sqrt{3})^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{16} \quad (1) \quad |x+2|-|x-1| > x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} [1] \quad x < -2 \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ は} \quad & -(x+2)+(x-1) > x \\ \text{よって} \quad & x < -3 \end{aligned}$$

これと $x < -2$ との共通範囲は $x < -3$

$$\begin{aligned} [2] \quad -2 \leq x < 1 \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ は} \quad & (x+2)+(x-1) > x \\ \text{よって} \quad & x > -1 \end{aligned}$$

これと $-2 \leq x < 1$ との共通範囲は $-1 < x < 1$

$$\begin{aligned} [3] \quad x \geq 1 \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ は} \quad & (x+2)-(x-1) > x \\ \text{よって} \quad & x < 3 \end{aligned}$$

これと $x \geq 1$ との共通範囲は $1 \leq x < 3$

$$[1], [2], [3] \text{ から, 解は} \quad x < -3, -1 < x < 3$$

$$(2) \quad ||x-1|-2|-3=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} [1] \quad x \geq 1 \text{ のとき} \quad & |x-1|=x-1 \text{ であるから, } \textcircled{1} \text{ は} \\ & |(x-1)-2|-3=0 \quad \text{すなわち} \quad |x-3|=3 \\ \text{よって} \quad & x-3 = \pm 3 \quad \text{これを解くと} \quad x=6, 0 \\ x \geq 1 \text{ を満たすのは} \quad & x=6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2] \quad x < 1 \text{ のとき} \quad & |x-1|=-(x-1) \text{ であるから, } \textcircled{1} \text{ は} \\ & |-(x-1)-2|-3=0 \quad \text{すなわち} \quad |x+1|=3 \\ \text{よって} \quad & x+1 = \pm 3 \quad \text{これを解くと} \quad x=2, -4 \\ x < 1 \text{ を満たすのは} \quad & x=-4 \end{aligned}$$

$$[1], [2] \text{ から, 解は} \quad x=6, -4$$

$$\boxed{17} \quad \begin{cases} 7x-5 > 13-2x & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x+a \geq 3x+5 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ から} \quad 9x > 18 \quad \text{よって} \quad x > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

数学① 第1回試練 数と式①

10/ 10

②から $-2x \geq -a+5$ よって $x \leq \frac{a-5}{2}$ …… ④

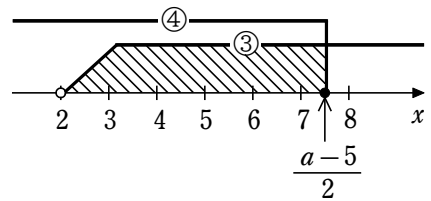
条件を満たすのは、③と④を同時に満たす整数 x が 3, 4, 5, 6, 7 となるときであるから

$$7 \leq \frac{a-5}{2} < 8$$

各辺に 2 を掛けて $14 \leq a-5 < 16$

各辺に 5 を加えて $19 \leq a < 21$

これが求める a の値の範囲である。



BASIC問題

- ① 次の関数に最大値, 最小値があればそれを求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。
- (1) $y=2x^2+8x+9$
 - (2) $y=x^2-2x$ ($0 \leq x \leq 3$)
 - (3) $y=-3x^2-2x+4$ ($-1 < x < 2$)
- ② 次の不等式を解け。
- (1) $5 < x^2+4x \leq 21$
 - (2) $2x+3 < x^2 < 5$
- ③ 2次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフを y 軸方向に 2 だけ平行移動したあと, y 軸に関して対称移動させ, 更に x 軸方向に -3 だけ平行移動したところ, $y=x^2$ のグラフと一致した。 a, b の値を求めよ。
- ④ グラフが 3 点 $(1, 3), (2, 5), (3, 9)$ を通るような 2 次関数を求めよ。

STANDARD問題

- ⑤ 2次不等式 $4x^2+ax+b < 0$ の解が $1 < x < \frac{5}{4}$ であるとき, 2次不等式 $bx^2+ax+4 \geq 0$ の解を求めよ。
- ⑥ a は定数とする。関数 $y=2x^2-4ax-a$ ($0 \leq x \leq 2$) について, 次の問いに答えよ。
- (1) 最小値を求めよ。
 - (2) 最大値を求めよ。
- ⑦ 次の条件を満たすとき, 定数 m の値の範囲を求めよ。
- (1) 2次不等式 $x^2-(m-1)x+3 > 0$ の解がすべての実数となる。
 - (2) 2次不等式 $-x^2+2mx+m \geq 0$ が解をもつ。
- ⑧ 2次方程式 $x^2-(a+2)x+a(2a+1)=0$ の異なる 2 つの実数解を α, β とするとき, $1 < \alpha < \frac{3}{2} < \beta$ を満たすように, 定数 a の値の範囲を定めよ。
- ⑨ 2次方程式 $x^2-2mx+9=0$ が $2 < x < 4$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつとき, 定数 m の値の範囲を求めよ。
- ⑩ 2次方程式 $x^2+2ax+2a^2+2ab+4=0$ は, 定数 a がどのような実数値であっても実数解をもたないという。実定数 b はどんな範囲にあるか求めよ。
- ⑪ $f(x)=-x^2+ax+a-2, g(x)=x^2-(a-2)x+3$ について, 次の条件を満たすように, 定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ。
- (1) どんな x の値に対しても $f(x) < g(x)$ が成り立つ。
 - (2) どんな x_1, x_2 の値に対しても, $f(x_1) < g(x_2)$ が成り立つ。

実戦問題

- 12 x についての次の2つの不等式

$$2x^2 - 3x - 5 > 0$$

$$x^2 - (a+2)x + 2a < 0$$

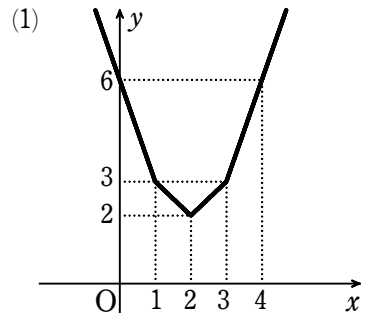
を同時に満たす整数 x がただ1つ存在するとき、定数 a の値の範囲とそのときの整数 x の値を求めよ。

- 13 2次不等式 $x^2 - 2ax + a + 2 > 0$ が $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で常に成り立つとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

- 14 $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき、 x の関数 $y = \sum_{k=1}^{2n+1} |x - k|$ の最小値とそれを与える x の値を求めよ。

数学① 第2回試験 二次関数

- 1 解答 (1) 最大値はない, $x = -2$ のとき最小値 1
 (2) $x = 3$ のとき最大値 3, $x = 1$ のとき最小値 -1
 (3) $x = -\frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{13}{3}$, 最小値はない
- 2 解答 (1) $-7 \leq x < -5, 1 < x \leq 3$ (2) $-\sqrt{5} < x < -1$
- 3 解答 $a = 6, b = 7$
- 4 解答 $y = x^2 - x + 3$
- 5 解答 $x \leq \frac{4}{5}, 1 \leq x$
- 6 解答 (1) $a < 0$ のとき $x = 0$ で最小値 $-a$,
 $0 \leq a \leq 2$ のとき $x = a$ で最小値 $-2a^2 - a$,
 $2 < a$ のとき $x = 2$ で最小値 $-9a + 8$
 (2) $a < 1$ のとき $x = 2$ で最大値 $-9a + 8$;
 $a = 1$ のとき $x = 0, 2$ で最大値 -1 ;
 $1 < a$ のとき $x = 0$ で最大値 $-a$
- 7 解答 (1) $1 - 2\sqrt{3} < m < 1 + 2\sqrt{3}$ (2) $m \leq -1, 0 \leq m$
- 8 解答 $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{3}{4}$
- 9 解答 $3 < m < \frac{25}{8}$
- 10 解答 $-2 < b < 2$
- 11 解答 (1) $-3 < a < 3$ (2) $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$
- 12 解答 $-3 \leq a < -2$ のとき $x = -2, 3 < a \leq 4$ のとき $x = 3$
- 13 解答 $-1 < a < 3$
- 14 解答 (1) [図]
 (2) $x = n + 1$ のとき最小値 $n^2 + n$

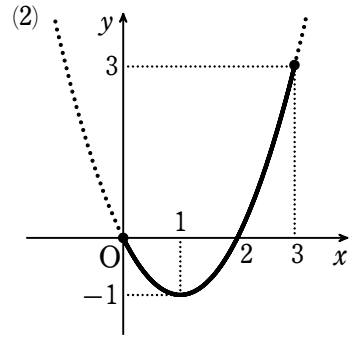


① (1) $y = 2x^2 + 8x + 9$
 $= 2(x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2) - 2 \cdot 2^2 + 9$
 $= 2(x+2)^2 + 1$

よって、 $x = -2$ のとき最小値 1 をとる。
 最大値はない。

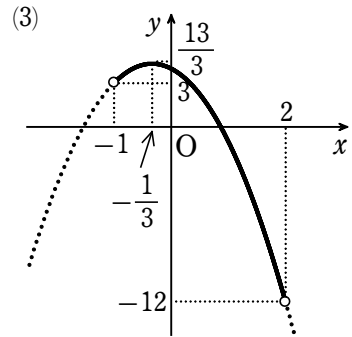
(2) $y = x^2 - 2x$
 $= (x^2 - 2 \cdot 1x + 1^2) - 1^2$
 $= (x-1)^2 - 1 \quad (0 \leq x \leq 3)$

よって、グラフは [図] の実線部分である。
 ゆえに、 $x = 3$ のとき最大値 3,
 $x = 1$ のとき最小値 -1 をとる。



(3) $y = -3x^2 - 2x + 4$
 $= -3\left\{x^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4$
 $= -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{13}{3} \quad (-1 < x < 2)$

よって、グラフは [図] の実線部分である。
 ゆえに、 $x = -\frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{13}{3}$ をとる。
 最小値はない。



② (1) $5 < x^2 + 4x \leq 21$ から $\begin{cases} 5 < x^2 + 4x & \dots\dots ① \\ x^2 + 4x \leq 21 & \dots\dots ② \end{cases}$

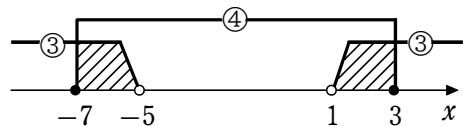
① から $x^2 + 4x - 5 > 0$ よって $(x+5)(x-1) > 0$

ゆえに $x < -5, 1 < x \dots\dots ③$

② から $x^2 + 4x - 21 \leq 0$ よって $(x+7)(x-3) \leq 0$

ゆえに $-7 \leq x \leq 3 \dots\dots ④$

③ と ④ の共通範囲を求めて
 $-7 \leq x < -5, 1 < x \leq 3$



(2) $2x + 3 < x^2 < 5$ から $\begin{cases} 2x + 3 < x^2 & \dots\dots ① \\ x^2 < 5 & \dots\dots ② \end{cases}$

① から $x^2 - 2x - 3 > 0$ よって $(x+1)(x-3) > 0$

ゆえに $x < -1, 3 < x \dots\dots ③$

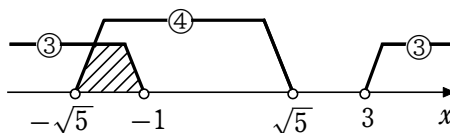
② から $x^2 - 5 < 0$ $x^2 - 5 = 0$ を解くと $x = \pm\sqrt{5}$

よって、②の解は

$$-\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③と④の共通範囲を求めて

$$-\sqrt{5} < x < -1$$



③ 移動を逆にたどる.

$y=x^2$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動すると、グラフの方程式は $y=(x-3)^2$

このグラフを y 軸に関して対称移動すると、グラフの方程式は $y=(-x-3)^2$

すなわち $y=(x+3)^2$

このグラフを y 軸方向に -2 だけ平行移動すると、グラフの方程式は $y=(x+3)^2-2$

すなわち $y=x^2+6x+7$

これが $y=x^2+ax+b$ と一致するから $a=6, b=7$

④ 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

そのグラフが 3 点 $(1, 3), (2, 5), (3, 9)$ を通るから

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ 9 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a + b + c = 3 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 4a + 2b + c = 5 & \dots\dots \textcircled{2} \\ 9a + 3b + c = 9 & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

②-① から $3a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$

③-② から $5a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{5}$

⑤-④ から $2a=2$ よって $a=1$

④ から $3+b=2$ よって $b=-1$

① から $1-1+c=3$ よって $c=3$

したがって、求める 2 次関数は $y=x^2-x+3$

⑤ 条件から、 $y=4x^2+ax+b$ のグラフは $1 < x < \frac{5}{4}$ の範囲で x 軸より下側にある。

すなわち、2 点 $(1, 0), (\frac{5}{4}, 0)$ を通るから $4+a+b=0, \frac{25}{4}+\frac{5}{4}a+b=0$

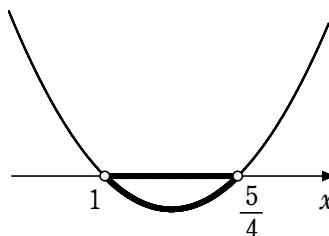
これを解くと $a=-9, b=5$

よって、不等式 $bx^2+ax+4 \geq 0$ は

$$5x^2-9x+4 \geq 0$$

すなわち $(5x-4)(x-1) \geq 0$

これを解くと $x \leq \frac{4}{5}, 1 \leq x$



⑥ $y=2x^2-4ax-a$ を変形すると

$$y=2(x-a)^2-2a^2-a$$

この放物線の軸は直線 $x = a$ である。

(1) [1] $a < 0$ のとき

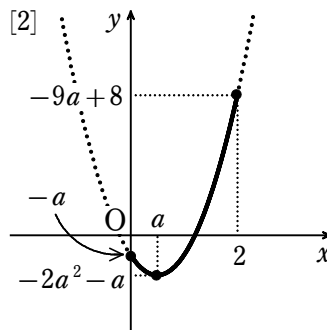
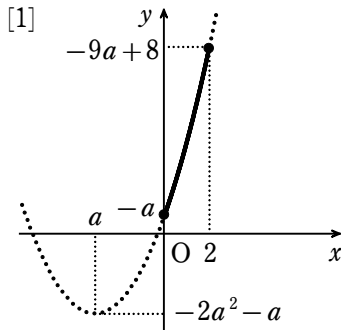
グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって、 $x = 0$ で最小値 $-a$ をとる。

[2] $0 \leq a \leq 2$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって、 $x = a$ で最小値 $-2a^2 - a$ をとる。

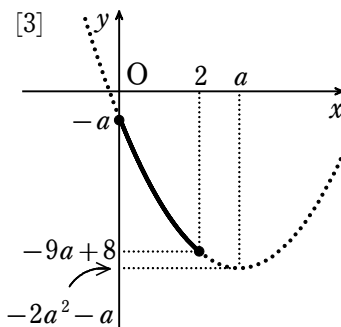


[3] $2 < a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって、

$x = 2$ で最小値 $-9a + 8$ をとる。



以上から

$a < 0$ のとき $x = 0$ で最小値 $-a$

$0 \leq a \leq 2$ のとき $x = a$ で最小値 $-2a^2 - a$

$2 < a$ のとき $x = 2$ で最小値 $-9a + 8$

(2) 定義域の中央の値は 1

[1] $a < 1$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

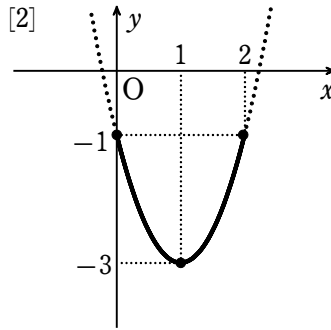
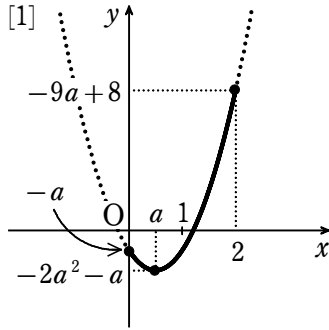
よって、 $x = 2$ で最大値 $-9a + 8$ をとる。

[2] $a = 1$ のとき

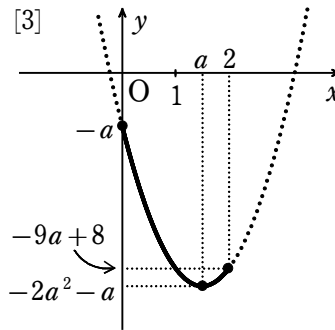
$$y = 2(x-1)^2 - 3$$

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって、 $x = 0, 2$ で最大値 -1 をとる。



[3] $1 < a$ のとき
 グラフは [図] の実線部分
 のようになる。
 よって、
 $x=0$ で最大値 $-a$
 をとる。



以上から

$a < 1$ のとき $x=2$ で最大値 $-9a+8$

$a=1$ のとき $x=0, 2$ で最大値 -1

$1 < a$ のとき $x=0$ で最大値 $-a$

[7] (1) x^2 の係数は正であるから、この2次不等式の解がすべての実数となるための必要十分条件は $D = \{-(m-1)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$ すなわち $m^2 - 2m - 11 < 0$
 これを解いて $1 - 2\sqrt{3} < m < 1 + 2\sqrt{3}$

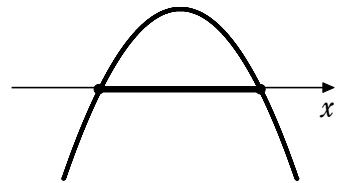
(2) この2次不等式が解をもつための必要十分条件は、
 $y = -x^2 + 2mx + m$ のグラフが x 軸と共有点をもつ
 ことである。

すなわち $D = (2m)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot m \geq 0$

よって $4(m^2 + m) \geq 0$

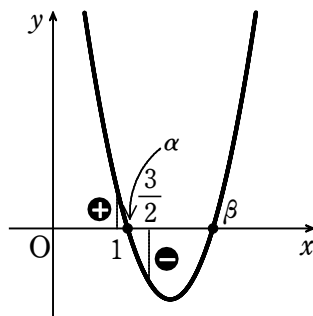
ゆえに $m(m+1) \geq 0$

したがって $m \leq -1, 0 \leq m$



数学① 第2回試験 二次関数

- 8 $f(x) = x^2 - (a+2)x + a(2a+1)$ とする。
 $y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから、
 $1 < \alpha < \frac{3}{2} < \beta$ となる条件は、右の図より



$$f(1) > 0 \quad \text{かつ} \quad f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$$

ここで $f(1) = 1^2 - (a+2) \cdot 1 + a(2a+1) = 2a^2 - 1$

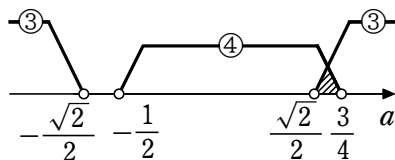
$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - (a+2) \cdot \frac{3}{2} + a(2a+1) \\ &= \frac{1}{4}(8a^2 - 2a - 3) \\ &= \frac{1}{4}(2a+1)(4a-3) \end{aligned}$$

であるから $\begin{cases} 2a^2 - 1 > 0 & \dots\dots ① \\ (2a+1)(4a-3) < 0 & \dots\dots ② \end{cases}$

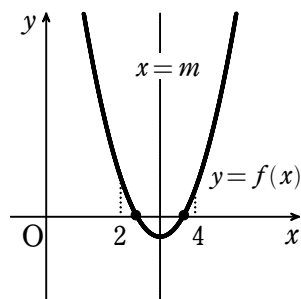
① から $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} < a \dots\dots ③$

② から $-\frac{1}{2} < a < \frac{3}{4} \dots\dots ④$

③ と ④ の共通範囲を求めて $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{3}{4}$



- 9 $f(x) = x^2 - 2mx + 9$ とおく。
 方程式 $f(x) = 0$ が $2 < x < 4$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつための条件は、 $y = f(x)$ のグラフが x 軸の $2 < x < 4$ の範囲と異なる 2 点で交わることである。
 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると、求める条件は



$$D > 0$$

かつ 軸 $x = m$ について $2 < m < 4 \dots\dots ①$

かつ $f(2) > 0$ かつ $f(4) > 0$

$\frac{D}{4} = m^2 - 9 = (m+3)(m-3)$ であるから、 $D > 0$ より

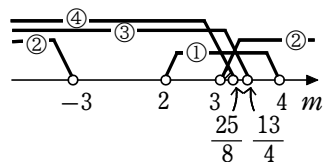
$$m < -3, 3 < m \dots\dots ②$$

$f(2) > 0, f(4) > 0$ から $-4m + 13 > 0, -8m + 25 > 0$

よって $m < \frac{13}{4} \dots\dots ③, m < \frac{25}{8} \dots\dots ④$

①, ②, ③, ④ の共通範囲を求めて

$$3 < m < \frac{25}{8}$$



- 10 $x^2 + 2ax + 2a^2 + 2ab + 4 = 0$ の判別式を D_1 とすると $\frac{D_1}{4} = a^2 - (2a^2 + 2ab + 4) < 0$

すなわち $a^2 + 2ab + 4 > 0$

この不等式が、どのような a の実数値に対しても成り立つような b の値の範囲を求めればよい。

よって、 $a^2 + 2ab + 4 = 0$ の判別式を D_2 とすると $\frac{D_2}{4} = b^2 - 4 < 0$

これを解いて $-2 < b < 2$

11 (1) $g(x) - f(x) = 2x^2 - 2(a-1)x - a + 5$

どんな x の値に対しても $f(x) < g(x)$, すなわち $g(x) - f(x) > 0$ が成り立つための必要十分条件は $D = \{-2(a-1)\}^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-a+5) < 0$

整理すると $a^2 - 9 < 0$ よって $(a+3)(a-3) < 0$

したがって $-3 < a < 3$

(2) どんな x_1, x_2 の値に対しても、 $f(x_1) < g(x_2)$ が成り立つための必要十分条件は、 $f(x)$ の最大値より $g(x)$ の最小値の方が大きいことである。

$$f(x) = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + a - 2, \quad g(x) = \left(x - \frac{a-2}{2}\right)^2 - \frac{(a-2)^2}{4} + 3$$

よって $\frac{a^2}{4} + a - 2 < -\frac{(a-2)^2}{4} + 3$ 整理すると $a^2 - 8 < 0$

ゆえに $(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2}) < 0$ したがって $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

12 $2x^2 - 3x - 5 > 0$ …… ①, $x^2 - (a+2)x + 2a < 0$ …… ② とする。

①の左辺を因数分解すると $(x+1)(2x-5) > 0$

したがって、①の解は $x < -1$ または $\frac{5}{2} < x$

②の左辺を因数分解すると $(x-a)(x-2) < 0$

②の解は、 $a \neq 2$ のとき存在し、

$a < 2$ のとき $a < x < 2$

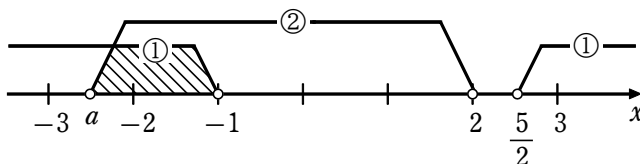
$a > 2$ のとき $2 < x < a$

である。

よって、①と②を同時に満たす整数 x がただ1つになるのは、次の各場合である。

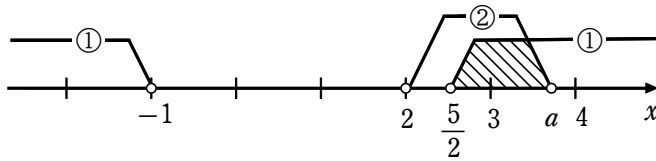
[1] $-3 \leq a < -2$ のとき

①と②の解の共通範囲は $a < x < -1$ で、①と②を同時に満たす整数 x は -2



[2] $3 < a \leq 4$ のとき

①と②の解の共通範囲は $\frac{5}{2} < x < a$ で、①と②を同時に満たす整数 x は 3



- [13] 2次不等式 $x^2 - 2ax + a + 2 > 0$ が $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で常に成り立つための条件は、関数 $y = x^2 - 2ax + a + 2$ の $-1 \leq x \leq 1$ における最小値が0より大きいことである。

$f(x) = x^2 - 2ax + a + 2$ とおくと $f(x) = (x - a)^2 - a^2 + a + 2$
 $y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で、軸は直線 $x = a$ である。

- [1] $a < -1$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは右の図のようになるから、
 $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値は

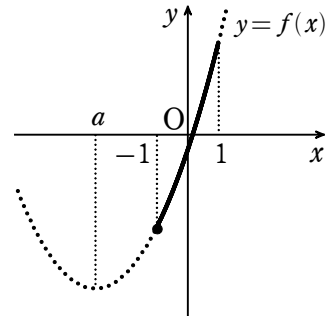
$$f(-1) = 3a + 3$$

よって、不等式が常に成り立つとき

$$3a + 3 > 0$$

ゆえに $a > -1$

これは $a < -1$ を満たさない。



- [2] $-1 \leq a \leq 1$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは右の図のようになるから、
 $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値は

$$f(a) = -a^2 + a + 2$$

よって、不等式が常に成り立つとき

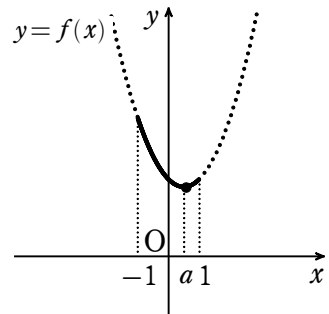
$$-a^2 + a + 2 > 0$$

すなわち $a^2 - a - 2 < 0$

よって $(a + 1)(a - 2) < 0$

ゆえに $-1 < a < 2$

$-1 \leq a \leq 1$ との共通範囲は $-1 < a \leq 1$



- [3] $1 < a$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは右の図のようになるから、
 $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値は

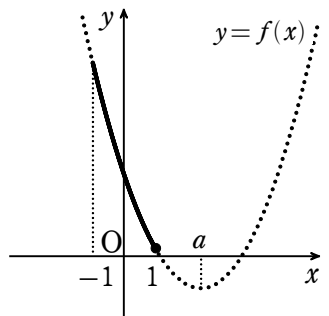
$$f(1) = -a + 3$$

よって、不等式が常に成り立つとき

$$-a + 3 > 0$$

よって $a < 3$

$1 < a$ との共通範囲は $1 < a < 3$



[1] ~ [3] より、求める a の値の範囲は $-1 < a < 3$

14 (1) $x \leq 1$ のとき

$$y = (1-x) + (2-x) + (3-x) = -3x + 6$$

$1 \leq x \leq 2$ のとき

$$y = (x-1) + (2-x) + (3-x) = -x + 4$$

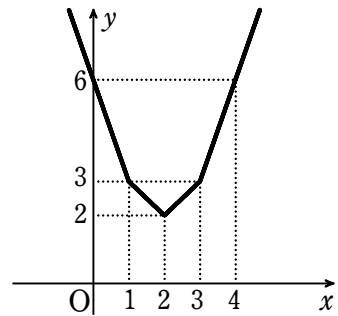
$2 \leq x \leq 3$ のとき

$$y = (x-1) + (x-2) + (3-x) = x$$

$3 \leq x$ のとき

$$y = (x-1) + (x-2) + (x-3) = 3x - 6$$

これらを図示すると図のようになる。



(2) [1] $x \leq 1$ のとき

$$y = \sum_{k=1}^{2n+1} (k-x) = -(2n+1)x + (2n+1)(n+1)$$

$-(2n+1) < 0$ であるから、 $x=1$ のとき最小値

$$-(2n+1) \cdot 1 + (2n+1)(n+1) = 2n^2 + n \text{ をとる.}$$

[2] $l \leq x \leq l+1$ ($l=1, 2, \dots, 2n$) のとき

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=1}^l (x-k) + \sum_{k=l+1}^{2n+1} (k-x) \\ &= lx - \frac{1}{2}l(l+1) + \frac{1}{2}(2n+1-l)(2n+l+2) - (2n+1-l)x \\ &= (2l-2n-1)x + \frac{1}{2}\{(2n-l+1)(2n+l+2) - l(l+1)\} \\ &= \{2l-(2n+1)\}x + 2n^2 + 3n - l^2 - l + 1 \end{aligned}$$

(i) $1 \leq l \leq n$ のとき

$2l-(2n+1) < 0$ であるから、 $x=l+1$ で最小値

$$\{2l-(2n+1)\}(l+1) + 2n^2 + 3n - l^2 - l + 1$$

$$= l^2 - 2nl + 2n^2 + n$$

$$= (l-n)^2 + n^2 + n \text{ をとる.}$$

更に、この式は $1 \leq l \leq n$ において、 $l=n$ のとき最小値 $n^2 + n$ をとる。

(ii) $n+1 \leq l \leq 2n$ のとき

$2l-(2n+1) > 0$ であるから、 $x=l$ で最小値

$$\{2l-(2n+1)\}l + 2n^2 + 3n - l^2 - l + 1$$

$$= l^2 - 2(n+1)l + 2n^2 + 3n + 1$$

$$= \{l-(n+1)\}^2 + n^2 + n \text{ をとる.}$$

更に、この式は $n+1 \leq l \leq 2n$ において、 $l=n+1$ のとき最小値 $n^2 + n$ をとる。

[3] $2n+1 \leq x$ のとき

$$y = \sum_{k=1}^{2n+1} (x-k) = (2n+1)x - (2n+1)(n+1)$$

$2n+1 > 0$ であるから、 $x=2n+1$ のとき最小値

$$(2n+1)(2n+1) - (2n+1)(n+1) = 2n^2 + n \text{ をとる.}$$

数学① 第2回試練 二次関数

12 / 12

[1] ~ [3] において $2n^2 + n > n^2 + n$

ゆえに, $x = n + 1$ のとき最小値 $n^2 + n$

BASIC問題篇

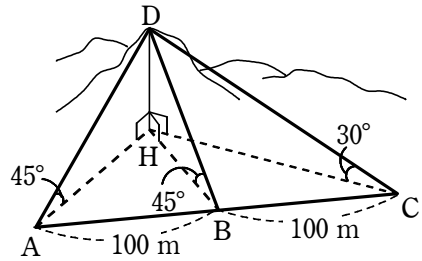
- 1 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。次の三角比の値を求めよ。
- (1) $\tan \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\cos \theta$, $\sin \theta$
- (2) $\tan \theta = -3$ のとき, $\cos \theta$, $\sin \theta$
- 2 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, 次のような θ を求めよ。
- (1) $2\sin \theta - 1 = 0$ (2) $\sqrt{2}\cos \theta + 1 = 0$
- (3) $3\tan \theta = \sqrt{3}$ (4) $(\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1) = 0$
- 3 $\triangle ABC$ において, $a = \sqrt{6}$, $A = 60^\circ$, $C = 45^\circ$ のとき, c と外接円の半径 R を求めよ。
- 4 $\triangle ABC$ において, 次のものを求めよ。
- (1) $c = 4$, $a = 6$, $B = 60^\circ$ のとき b
- (2) $a = 3$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{17}$ のとき C
- 5 $\triangle ABC$ において, $AB = 2$, $BC = \sqrt{7}$, $CA = 3$ とする。 $\triangle ABC$ の外接円の半径 R と, 内接円の半径 r を求めよ。

STANDARD問題篇

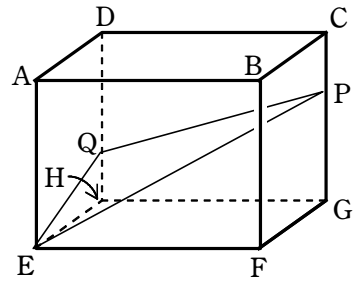
- 6 θ が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ かつ $\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{2}$ を満たすとき, $\cos \theta + \sin \theta$, $\cos^3 \theta + \sin^3 \theta$ の値を求めよ。
- 7 円に内接する四角形 $ABCD$ において, $AB = 2$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DA = 4$ とする。次の値を求めよ。
- (1) AC の長さ (2) 四角形 $ABCD$ の面積
- (3) 2つの対角線 AC と BD の交点を E とすると $BE : ED$ の比
- 8 $a = 5$, $b = 6$, $c = 4$ の $\triangle ABC$ がある。頂角 A の二等分線と辺 BC の交点を D , 辺 BC の中点を M とするとき, 線分 AD , AM の長さを求めよ。
- 9 $\triangle ABC$ が次の条件を満たすとすれば, どんな三角形か。
- (1) $\sin A = \sin B$
- (2) $\sin A \cos A = \sin B \cos B$

実戦問題篇

- 10 右の図のように1つの直線上に並ぶ水平面上の3点A, B, Cから山頂Dの仰角を測ると、それぞれ 45° , 45° , 30° であったという。
 $AB=100$ m, $BC=100$ m であるとき、山の高さを求めよ。



- 11 $AB=4$, $AE=AD=3$ である直方体 $ABCD-EFGH$ において、辺 CG と辺 HD を $1:2$ に内分する点をそれぞれ P と Q とする。このとき、
 $EP = \sqrt{\square}$ で、 $\cos \angle EQP = \frac{1}{\square}$ である。
 さらに、 $\triangle EPQ$ の面積は $\sqrt{\square}$ で、三角錐 $AEPQ$ の体積は $\frac{\square}{\square}$ である。また、点 A から $\triangle EPQ$ に下ろした垂線の長さは $\frac{\square}{\square}$ である。



- 12 $\triangle ABC$ において、頂角 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の大きさをそれぞれ A , B , C とし、辺 BC , CA , AB の長さをそれぞれ a , b , c とする。次の関係式が成立するとき、 $\triangle ABC$ はどのような形の三角形か。

$$a \sin A (\sin B - \sin C) = b \sin^2 B - (b + c) \sin B \sin C - c \cos^2 C + c$$

- 13 四角形 $ABCD$ において、3 辺の長さをそれぞれ $AB=5$, $BC=8$, $CD=4$, 対角線 AC の長さを $AC=7$ とする。

このとき、 $\cos \angle ABC = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$, $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{\text{ウ}}}{\text{エ}}$ である。

ここで、四角形 $ABCD$ は台形であるとする。

次の オ には下の ①~② から、カ には ③, ④ から当てはまるものを一つずつ選べ。

CD オ $AB \cdot \sin \angle ABC$ であるから、カ である。

① $<$ ② $=$ ③ $>$

④ 辺 AD と辺 BC が平行 ⑤ 辺 AB と辺 CD が平行

したがって、 $BD = \sqrt{\text{キ} \cdot \text{ク}}$ である。

数学① 第3回試験 三角比

3 / 10

1 解答 (1) $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (2) $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

2 解答 (1) $\theta = 30^\circ, 150^\circ$ (2) $\theta = 135^\circ$ (3) $\theta = 30^\circ$ (4) $\theta = 60^\circ, 180^\circ$

3 解答 $c = 2, R = \sqrt{2}$

4 解答 (1) $b = 2\sqrt{7}$ (2) $C = 135^\circ$

5 解答 $R = \frac{\sqrt{21}}{3}, r = \frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{6}$

6 解答 $\cos \theta + \sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{2}, \cos^3 \theta + \sin^3 \theta = \frac{5\sqrt{7}}{16}$

7 解答 (1) $\frac{7}{2}$ (2) $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ (3) 1:3

8 解答 $AD = 3\sqrt{2}, AM = \frac{\sqrt{79}}{2}$

9 解答 (1) BC=CA の二等辺三角形
(2) BC=CA の二等辺三角形 または $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形

10 解答 100 m

11 解答 (ア) $\sqrt{29}$ (イ) $-\frac{1}{\sqrt{170}}$ (ウ) $\frac{13}{2}$ (エ) 6 (オ) $\frac{36}{13}$

12 解答 AB=AC の二等辺三角形, または $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形

13 解答 $\frac{(\text{ア})}{(\text{イ})} \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{(\text{ウ})}}{(\text{エ})} \frac{\sqrt{3}}{2}$ (オ) ① (カ) ④ (キ) $\sqrt{(\text{ク})} 4\sqrt{7}$

□1 (1) $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

よって $\cos^2\theta = \frac{4}{5}$

$\tan\theta > 0$ であるから $\cos\theta > 0$ で

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(2) $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (-3)^2 = 10$

よって $\cos^2\theta = \frac{1}{10}$

$\tan\theta < 0$ であるから $\cos\theta < 0$ で

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

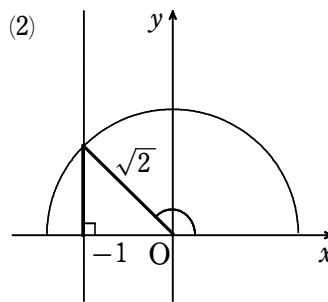
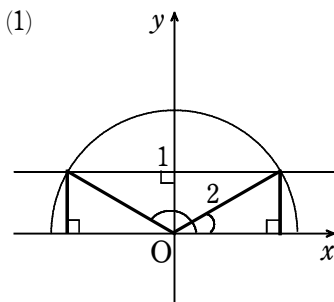
$$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = -3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

□2 (1) $2\sin\theta - 1 = 0$ から $\sin\theta = \frac{1}{2}$

よって $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

(2) $\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$ から $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって $\theta = 135^\circ$



(3) $3\tan\theta = \sqrt{3}$ から $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

よって $\theta = 30^\circ$

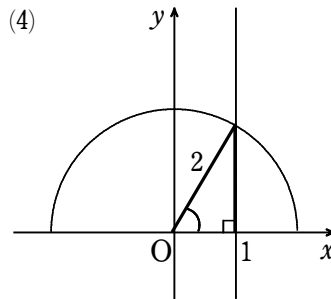
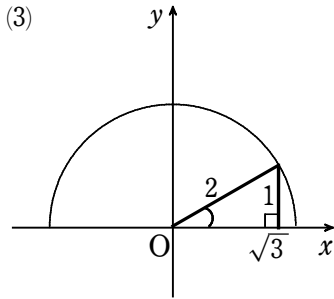
(4) $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$ から $\cos\theta + 1 = 0$ または $2\cos\theta - 1 = 0$

すなわち $\cos\theta = -1, \frac{1}{2}$

$\cos\theta = -1$ のとき $\theta = 180^\circ$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき $\theta = 60^\circ$

数学① 第3回試験 三角比

よって $\theta = 60^\circ, 180^\circ$



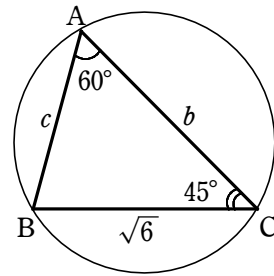
③ 正弦定理から $\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}$

$$c = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \times \sin 45^\circ = \sqrt{6} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 2$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$



④ (1) 余弦定理により

$$b^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 60^\circ$$

$$= 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 52 - 24 = 28$$

$b > 0$ であるから

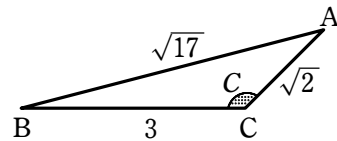
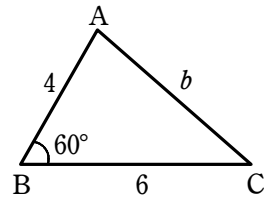
$$b = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

(2) 余弦定理により

$$\cos C = \frac{3^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{17})^2}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}$$

$$= \frac{9 + 2 - 17}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって $C = 135^\circ$



⑤ 余弦定理により $\cos A = \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$

よって $A = 60^\circ$

正弦定理により $2R = \frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$

ゆえに $R = \frac{\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

また、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} r (a + b + c) \text{ に代入して } \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} r (\sqrt{7} + 3 + 2)$$

$$\text{ゆえに } r = \frac{3\sqrt{3}}{5 + \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}(5 - \sqrt{7})}{(5 + \sqrt{7})(5 - \sqrt{7})} = \frac{\sqrt{3}(5 - \sqrt{7})}{6}$$

⑥ $\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{すなわち } 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって } \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } (\cos \theta + \sin \theta)^2 &= \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より, $\cos \theta > 0$, $\sin \theta > 0$ であるから

$$\cos \theta + \sin \theta > 0$$

$$\text{ゆえに } \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{また } \cos^3 \theta + \sin^3 \theta &= (\cos \theta + \sin \theta)(\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{5\sqrt{7}}{16} \end{aligned}$$

⑦ (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$AC^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos B = 8 - 8 \cos B \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると

$$AC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos D = 25 - 24 \cos D \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

四角形 ABCD は円に内接するから $D = 180^\circ - B$
 $\dots\dots \textcircled{3}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ から } 8 - 8 \cos B = 25 + 24 \cos B$$

$$\text{したがって } 32 \cos B = -17 \quad \cos B = -\frac{17}{32}$$

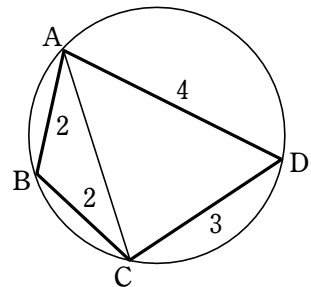
$$\textcircled{1} \text{ に代入して } AC^2 = \frac{49}{4}$$

$$AC > 0 \text{ であるから } AC = \frac{7}{2}$$

$$(2) (1) \text{ から } \sin B = \sqrt{1 - \left(-\frac{17}{32}\right)^2} = \frac{7\sqrt{15}}{32} = \sin D$$

よって 四角形 ABCD の面積を S とすると

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD$$



$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin B + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sin D = 8 \cdot \frac{7\sqrt{15}}{32} = \frac{7\sqrt{15}}{4}$$

(3) $BE : ED = \triangle ABC : \triangle ACD$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin B : \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sin D = 2 \sin B : 6 \sin B = 1 : 3$$

8 $\triangle ABC$ に余弦定理を適用して

$$\cos B = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}$$

また AD は頂角 A の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 4 : 6 = 2 : 3$$

したがって $BD = \frac{2}{5} BC = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2$

よって $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

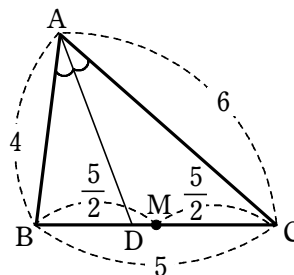
$$AD^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = 18$$

$AD > 0$ であるから $AD = 3\sqrt{2}$

$\triangle ABM$ に余弦定理を適用して

$$AM^2 = 4^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{79}{4}$$

$AM > 0$ であるから $AM = \frac{\sqrt{79}}{2}$



9 (1) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\sin A = \sin B \text{ から } \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R} \quad \text{すなわち } a = b$$

よって、 $\triangle ABC$ は $BC=CA$ の二等辺三角形である。

(2) 正弦定理により $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$

$$\text{また、余弦定理により } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\sin A \cos A = \sin B \cos B \text{ から } \frac{a}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\text{よって } a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2) \quad \text{すなわち } a^2c^2 - a^4 = b^2c^2 - b^4$$

$$\text{ゆえに } (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)c^2 = 0$$

$$\text{よって } (a + b)(a - b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$a > 0, b > 0 \text{ であるから } a = b \text{ または } a^2 + b^2 = c^2$$

したがって、 $\triangle ABC$ は $BC=CA$ の二等辺三角形 または $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形である。

10 山の高さを $DH = x$ (m) とすると $HA = x, HB = x, HC = \sqrt{3}x$

$$\triangle HAB \text{ において、余弦定理により } \cos A = \frac{100^2 + x^2 - x^2}{2 \cdot 100 \cdot x} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\triangle HAC \text{ において、余弦定理により } \cos A = \frac{200^2 + x^2 - (\sqrt{3}x)^2}{2 \cdot 200 \cdot x} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } \frac{100^2 + x^2 - x^2}{2 \cdot 100 \cdot x} = \frac{200^2 + x^2 - (\sqrt{3}x)^2}{2 \cdot 200 \cdot x}$$

$$\text{整理すると } x^2 = 10000 \quad x > 0 \text{ であるから } x = 100$$

したがって、山の高さは 100 m

11 条件から $CP=HQ=1$, $GP=DQ=2$

(ア) $EG=\sqrt{4^2+3^2}=5$ であるから

$$EP=\sqrt{EG^2+GP^2}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$$

(イ) $EQ=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, $PQ=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

$\triangle EPQ$ において, 余弦定理により

$$\cos \angle EQP = \frac{EQ^2 + PQ^2 - EP^2}{2EQ \cdot PQ} = \frac{10 + 17 - 29}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{170}}$$

(ウ) $\sin \angle EQP > 0$ であるから

$$\sin \angle EQP = \sqrt{1 - \cos^2 \angle EQP} = \sqrt{1 - \frac{1}{170}} = \frac{13}{\sqrt{170}}$$

$$\text{よって } \triangle EPQ = \frac{1}{2} EQ \cdot PQ \sin \angle EQP = \frac{1}{2} \sqrt{10} \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{13}{\sqrt{170}} = \frac{13}{2}$$

(エ) 三角錐 AEPQ の底面を $\triangle AEQ$ とすると, 高さは 4 である。

よって, 三角錐 AEPQ の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} \triangle AEQ \times 4 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \right) \times 4 = 6$$

(オ) A から $\triangle EPQ$ に下ろした垂線の長さを h とすると

$$V = \frac{1}{3} \triangle EPQ \times h = \frac{13}{6} h$$

$$\text{よって } \frac{13}{6} h = 6 \quad \text{ゆえに } h = \frac{36}{13}$$

12 $\cos^2 C = 1 - \sin^2 C$

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする. 正弦定理を適用すると

$$a \cdot \frac{a}{2R} \left(\frac{b}{2R} - \frac{c}{2R} \right) = b \left(\frac{b}{2R} \right)^2 - (b+c) \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} - c \left\{ 1 - \left(\frac{c}{2R} \right)^2 \right\} + c$$

両辺に $4R^2$ を掛けると $a^2(b-c) = b^3 - (b+c)bc + c^3$

ゆえに $a^2(b-c) = b^2(b-c) - c^2(b-c)$

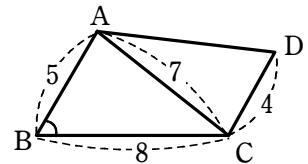
したがって $(b-c)(a^2 - b^2 + c^2) = 0$

よって $b=c$ または $a^2 + c^2 = b^2$

ゆえに, $\triangle ABC$ は, $AB=AC$ の二等辺三角形, または $\angle B=90^\circ$ の直角三角形.

13 $\triangle ABC$ において, 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos \angle ABC &= \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} \\ &= \frac{40}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



よって, $\angle ABC = 60^\circ$ であるから $\sin \angle ABC = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ここで $CD=4$

$$AB \cdot \sin \angle ABC = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{5 \cdot 1.7}{2} = 4.25$$

よって $CD < AB \cdot \sin \angle ABC$ …… ① (⊖)

四角形 ABCD が台形であるとき $AD \parallel BC$ または $AB \parallel CD$ が成り立つ。

頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AH とすると、① から

$$AH = AB \cdot \sin \angle ABC > CD \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$AD \parallel BC$ が成り立つと仮定すると、右の図のように

$$AH \leq CD$$

となるが、これは ② に矛盾する。

よって、 $AD \parallel BC$ は成り立たないから、 $AB \parallel CD$ となる。

すなわち、辺 AB と辺 CD が平行である。 (⊕)

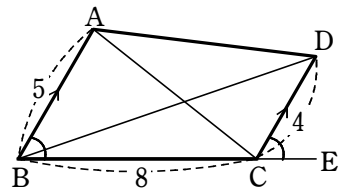
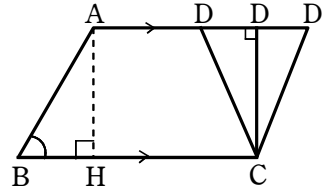
右の図のように、辺 BC の延長上に点 E をとる。

$AB \parallel CD$ から $\angle DCE = \angle ABC = 60^\circ$

$\triangle BCD$ において、余弦定理により

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos \angle BCD \\ &= 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cos(180^\circ - 60^\circ) = 112 \end{aligned}$$

$BD > 0$ であるから $BD = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$

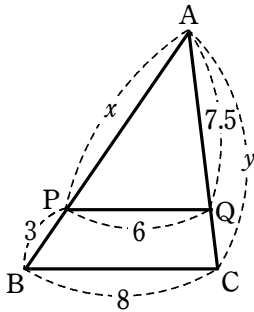


BASIC+STANDARD問題

1 3辺の長さが a , $a-1$, $50-a$ の三角形がある。このとき、 a の値の範囲を求めよ。
また、この三角形が直角三角形となるとき、 a の値を求めよ。

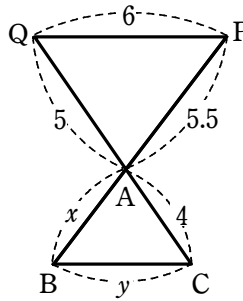
2 次の図において、 x , y の値を求めよ。

(1)



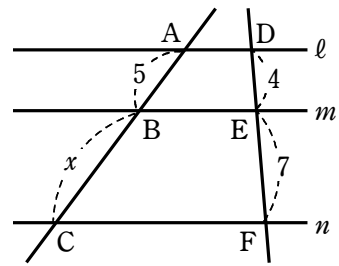
$PQ \parallel BC$

(2)



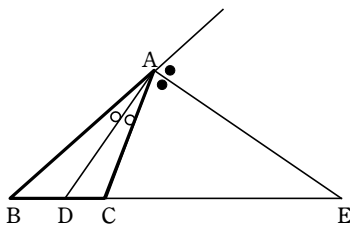
$PQ \parallel BC$

(3)



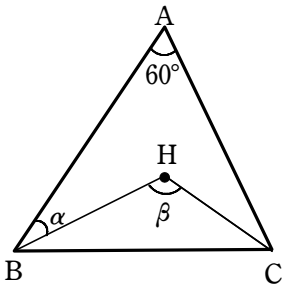
$l \parallel m \parallel n$

3 下の図で、 $AB=6$, $BC=3$, $CA=4$ であり、 AD は $\angle BAC$ の二等分線、 AE は $\angle BAC$ の外角の二等分線である。
 BD の長さ と BE の長さをそれぞれ求めよ。

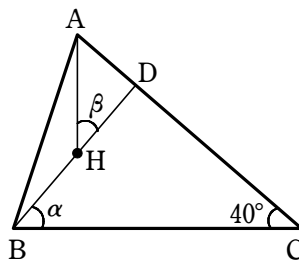


4 下の図において、点 H は $\triangle ABC$ の垂心である。角 α , β を求めよ。

(1)

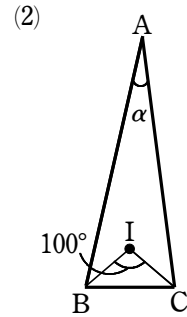
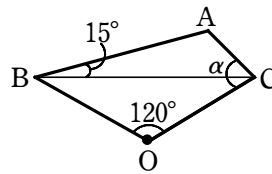


(2)

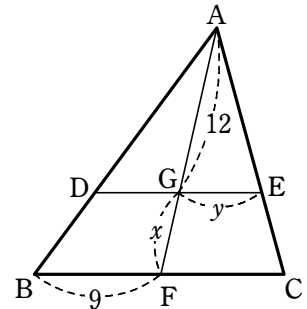


数学① 第4回試験 平面図形

- 5 右の図で、点Oは△ABCの外心、
点Iは△ABCの内心である。αを求めよ。



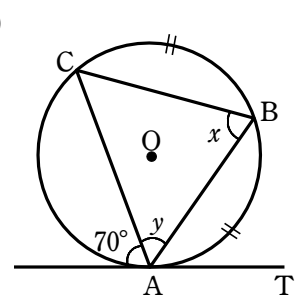
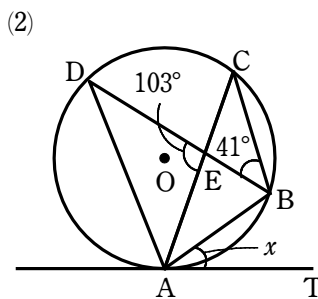
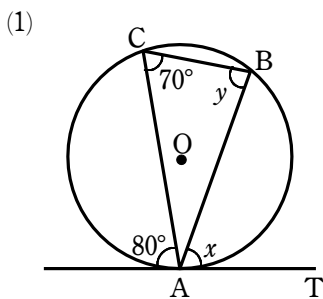
- 6 右の図において、点Gは△ABCの重心であり、
DE//BCである。このとき、x、yの値を求めよ。



- 7 △ABCの辺AB、AC上にそれぞれ点R、Qがあり、
AR : RB = 5 : 1, AQ : QC = 2 : 3である。線分BQとCRの交点をO、
直線AOと辺BCの交点をPとするとき、次の比を求めよ。

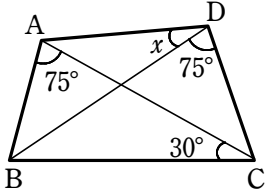
- (1) BP : PC (2) AO : OP (3) △ABC : △OBC

- 8 次の図において、直線ATは点Aで円Oに接している。xとyを求めよ。

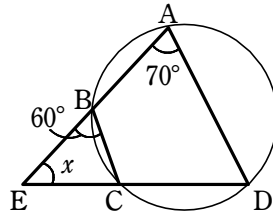


- 9 次の図において、角xの大きさを求めよ。

(1)

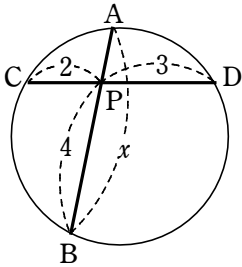


(2)

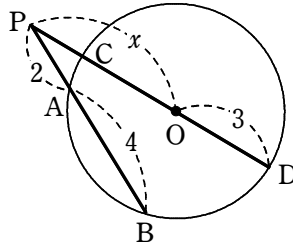


10 下の図において、 x の値を求めよ。Oは円の中心とする。

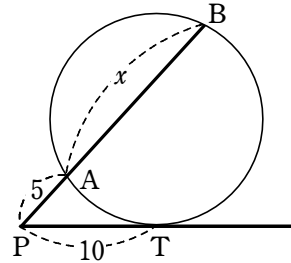
(1)



(2)

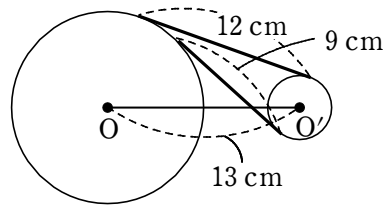


(3)



PTは円の接線

11 右の図のように、中心間の距離が13 cm、共通外接線の長さが12 cm、共通内接線の長さが9 cmである2つの円O, O'がある。
この2つの円の半径を、それぞれ求めよ。



12 3辺の長さが a, b, c の直角三角形の外接円の半径が $\frac{3}{2}$ 、内接円の半径が $\frac{1}{2}$ のとき、

次の問いに答えよ。ただし、 $a \geq b \geq c$ とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) b と c の値を求めよ。

実戦問題

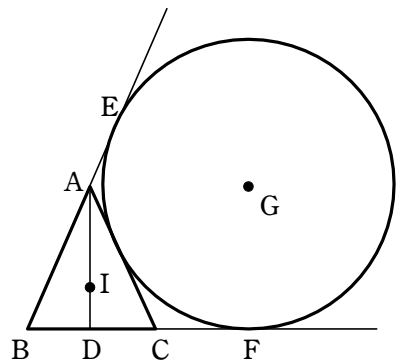
13 AB=2, BC=x, AC=4-xであるような△ABCがある。

- (1) xの値の範囲を求めよ。
- (2) △ABCが鋭角三角形であるようなxの値の範囲を求めよ。

14 鋭角三角形ABCにおいて、AB=8とする。辺ACを1:2に内分する点をDとし、辺BCを3:2に内分する点をEとする。このとき、2点D, Eを通る直線ℓと2点A, Bを通る直線の交点をPとすると、AP= である。また、直線ℓと三角形ABCの外接円との2つの交点のうちPに近い方の交点をQとし、他の交点をRとする。このとき、PQ=3ならば、QR= である。

15 AB=ACである二等辺三角形ABCの内接円の中心をIとし、内接円と辺BCの接点をDとする。辺BAの延長と点Eで、辺BCの延長と点Fで接し、辺ACと接する∠B内の円の中心をGとする。

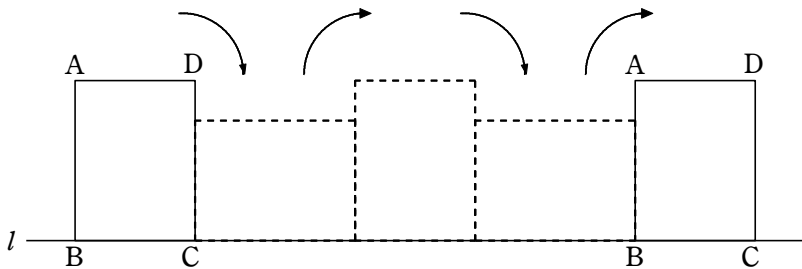
- (1) AD=GFとなることを証明せよ。
- (2) AB=7, BD=3のとき、IGの長さを求めよ。



16 C₁, C₂, C₃は、半径がそれぞれa, a, 2aの円とする。いま、半径1の円Cにこれらが内接していて、C₁, C₂, C₃は互いに外接しているとき、aの値を求めよ。

17 (出典・2009常総学院高)

図のように、AB=4 cm, BC=3 cm, CA=5 cmである長方形ABCDを直線ℓに沿って、滑ることなくちょうど1回転するまで転がす。



頂点Bが動いた跡の線の長さは π cm であり、頂点Bが動いた跡の線と直線ℓとで囲まれた部分の面積は cm² である。ただし、πは円周率とする。

数学① 第4回試験 平面図形

- 1 解答 (前半) $17 < a < 49$ (後半) $a = 21, 41$
- 2 解答 (1) $x = 9, y = 10$ (2) $x = 4.4, y = 4.8$ (3) $x = 8.75$
- 3 解答 $BD = \frac{9}{5}, BE = 9$
- 4 解答 (1) $\alpha = 30^\circ, \beta = 120^\circ$ (2) $\alpha = 50^\circ, \beta = 40^\circ$
- 5 解答 (1) 75° (2) 20°
- 6 解答 $x = 6, y = 6$
- 7 解答 (1) $2 : 15$ (2) $17 : 3$ (3) $20 : 3$
- 8 解答 (1) $x = 70^\circ, y = 80^\circ$ (2) $x = 36^\circ$ (3) $x = 70^\circ, y = 55^\circ$
- 9 解答 (1) $x = 30^\circ$ (2) $x = 50^\circ$
- 10 解答 (1) $x = \frac{11}{2}$ (2) $x = \sqrt{21}$ (3) $x = 15$
- 11 解答 $\left(\sqrt{22} + \frac{5}{2}\right) \text{cm}, \left(\sqrt{22} - \frac{5}{2}\right) \text{cm}$
- 12 解答 (1) $a = 3$ (2) $b = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}, c = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$
- 13 解答 (1) $1 < x < 3$ (2) $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$
- 14 解答 (ア) 4 (イ) 13
- 15 解答 (1) 略 (2) $IG = \frac{7\sqrt{35}}{5}$
- 16 解答 $a = \frac{4\sqrt{2} - 5}{2}$
- 17 解答 (ア) 6 (イ) $\frac{25}{2}\pi + 12$

① (前半) 3辺の長さが $a, a-1, 50-a$ の三角形が存在するための条件は

$$a - (a-1) < 50 - a < a + (a-1)$$

すなわち $1 < 50 - a < 2a - 1$

$1 < 50 - a$ から $a < 49$ $50 - a < 2a - 1$ から $a > 17$

よって、求める a の値の範囲は $17 < a < 49$ …… ①

(後半) $a > a-1$ であるから、直角三角形となるのは次の [1], [2] のどちらかである。

[1] 長さ a の辺が斜辺になる場合

三平方の定理から $(a-1)^2 + (50-a)^2 = a^2$

整理すると $a^2 - 102a + 2501 = 0$

$$(a-41)(a-61) = 0$$

これを解くと $a = 41, 61$ ① を満たすのは $a = 41$

[2] 長さ $50-a$ の辺が斜辺になる場合

三平方の定理から $(a-1)^2 + a^2 = (50-a)^2$

整理すると $a^2 + 98a - 2499 = 0$

$$(a-21)(a+119) = 0$$

これを解くと $a = 21, -119$ ① を満たすのは $a = 21$

したがって、求める a の値は $a = 21, 41$

② (1) $PQ \parallel BC$ であるから

$$AP : AB = PQ : BC \quad \dots\dots \text{①}, \quad AQ : AC = PQ : BC \quad \dots\dots \text{②}$$

① から $x : (x+3) = 6 : 8$ ゆえに $8x = 6(x+3)$ よって $x = 9$

② から $7.5 : y = 6 : 8$ ゆえに $6y = 60$ よって $y = 10$

(2) $PQ \parallel BC$ であるから

$$AP : AB = AQ : AC \quad \dots\dots \text{①}, \quad PQ : BC = AQ : AC \quad \dots\dots \text{②}$$

① から $5.5 : x = 5 : 4$ ゆえに $5x = 22$ よって $x = 4.4$

② から $6 : y = 5 : 4$ ゆえに $5y = 24$ よって $y = 4.8$

(3) 点 A を通り、DF に平行な直線を引き、 m, n との交点をそれぞれ P, Q とする。

$BP \parallel CQ$ であるから

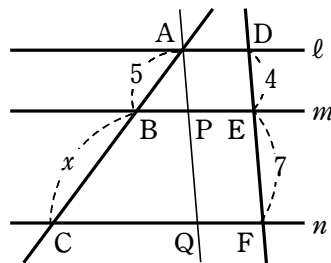
$$AB : BC = AP : PQ \quad \dots\dots \text{①}$$

また、四角形 APED, PQFE は、ともに 2 組の対辺が平行であるから平行四辺形である。

よって $AP = DE = 4, PQ = EF = 7$

ゆえに、① から $5 : x = 4 : 7$

よって $4x = 35$ ゆえに $x = 8.75$



③ BD の長さを x とおく。

$AB : AC = BD : DC$ が成り立つから $6 : 4 = x : (3-x)$

よって $2x = 3(3-x)$ ゆえに $x = \frac{9}{5}$

また、BE の長さを y とおく。

$AB : AC = BE : EC$ が成り立つから $6 : 4 = y : (y-3)$

よって $2y = 3(y-3)$ ゆえに $y = 9$

したがって $BD = \frac{9}{5}$, $BE = 9$

- 4 (1) 線分 BH の延長と辺 AC の交点を D, 線分 CH の延長と辺 AB の交点を E とする。

H は $\triangle ABC$ の垂心であるから

$\angle ADB = 90^\circ$, $\angle AEC = 90^\circ$

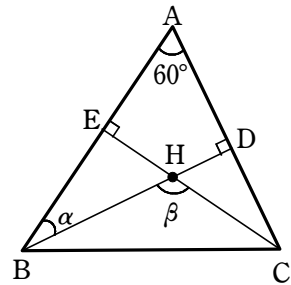
$\triangle ABD$ の内角の和は 180° であるから

$\alpha + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

よって $\alpha = 30^\circ$

また、 $\angle BHC = \angle BEH + \angle EBH$ であるから

$\beta = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$



- (2) 線分 AH の延長と辺 BC の交点を E とする。

H は $\triangle ABC$ の垂心であるから

$\angle BDC = 90^\circ$, $\angle AEB = 90^\circ$

$\triangle BDC$ の内角の和は 180° であるから

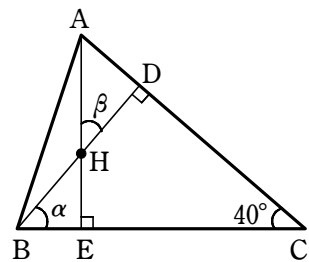
$\alpha + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

よって $\alpha = 50^\circ$

また、 $\angle AHD = \angle BHE$ であり、 $\triangle BHE$ の内角の和は 180° であるから

$50^\circ + 90^\circ + \beta = 180^\circ$

よって $\beta = 40^\circ$



- 5 (1) $OB = OC$ であるから

$\angle OBC = \angle OCB = (180^\circ - 120^\circ) \div 2 = 30^\circ$

よって $\angle ABO = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$

O と A を結ぶと、 $OA = OB$ であるから

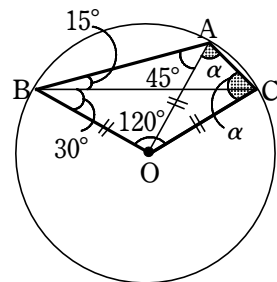
$\angle OAB = \angle ABO = 45^\circ$

ゆえに $\angle BOA = 180^\circ - 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

よって $\angle AOC = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

また、 $OA = OC$ であるから $\angle OAC = \angle OCA = \alpha$

したがって $\alpha = (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$



(2) $\triangle IBC$ において

$$\angle IBC + \angle ICB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \quad \dots\dots \text{①}$$

BI は $\angle B$ の二等分線であるから

$$\angle B = 2\angle IBC \quad \dots\dots \text{②}$$

CI は $\angle C$ の二等分線であるから

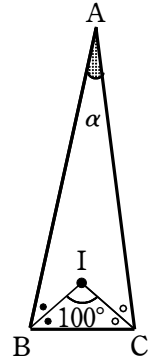
$$\angle C = 2\angle ICB \quad \dots\dots \text{③}$$

よって $\alpha = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$

②, ③ を代入して

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - (2\angle IBC + 2\angle ICB) \\ &= 180^\circ - 2(\angle IBC + \angle ICB) \end{aligned}$$

① を代入して $\alpha = 180^\circ - 2 \times 80^\circ = 20^\circ$



⑥ 重心 G は中線 AF を 2 : 1 に内分するから $12 : x = 2 : 1$

よって $2x = 12$ したがって $x = 6$

また, F は辺 BC の中点であるから $FC = BF = 9$

GE // FC であるから $GE : FC = AG : AF = 2 : 3$

よって $y : 9 = 2 : 3$ ゆえに $3y = 18$ したがって $y = 6$

⑦ (1) $\triangle ABC$ と点 O にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

よって $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{1} = 1$ ゆえに $\frac{BP}{PC} = \frac{2}{15}$

したがって $BP : PC = 2 : 15$

(2) $\triangle ABP$ と直線 RC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AO}{OP} \cdot \frac{PC}{CB} \cdot \frac{BR}{RA} = 1$$

ここで, (1) の結果から $PC : CB = 15 : 17$

よって $\frac{AO}{OP} \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{1}{5} = 1$ ゆえに $\frac{AO}{OP} = \frac{17}{3}$

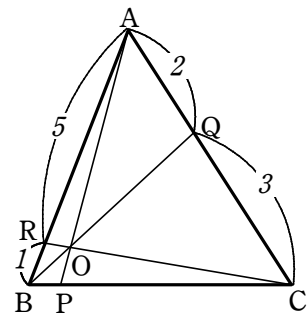
したがって $AO : OP = 17 : 3$

(3) 辺 BC は $\triangle ABC$ と $\triangle OBC$ の共通の底辺であるから

$$\triangle ABC : \triangle OBC = AP : OP$$

(2) の結果から $AP : OP = 20 : 3$

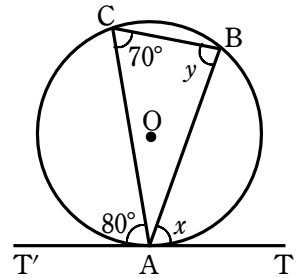
したがって $\triangle ABC : \triangle OBC = 20 : 3$



- 8 (1) 右の図において、接線と弦の作る角により

$$x = \angle ACB = 70^\circ$$

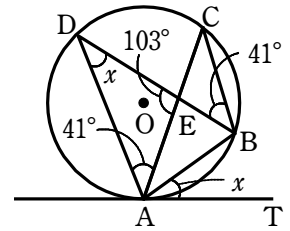
$$y = \angle CAT' = 80^\circ$$



- (2) 接線と弦の作る角により $\angle ADB = \angle BAT = x$
 また、円周角の定理により $\angle DAC = \angle DBC = 41^\circ$
 よって、 $\triangle ADE$ において

$$x = 180^\circ - (\angle DAE + \angle DEA)$$

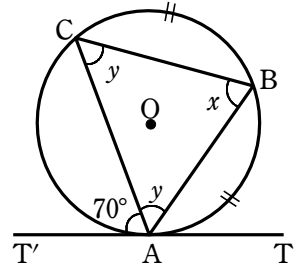
$$= 180^\circ - (41^\circ + 103^\circ) = 36^\circ$$



- (3) 右の図において、接線と弦の作る角により

$$x = \angle CAT' = 70^\circ \quad \dots\dots \text{①}$$

$\widehat{AB} = \widehat{BC}$ であるから $\angle BCA = \angle CAB = y$
 よって、 $\triangle ABC$ において $x + y + y = 180^\circ$
 これと ① から $70^\circ + 2y = 180^\circ$
 したがって $y = 55^\circ$



- 9 (1) $\angle BAC = \angle BDC (= 75^\circ)$ から、弧 BC に対する円周角が等しいので、四角形 ABCD は円に内接する。よって $x = \angle ADB = \angle ACB = 30^\circ$

- (2) 四角形 ABCD は円に内接しているので、 $\angle ADC = \angle EBC = 60^\circ$
 よって、 $\triangle AED$ において $x + 70^\circ + 60^\circ = 180^\circ$
 したがって $x = 50^\circ$

- 10 (1) 方べきの定理から $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ すなわち $(x-4) \cdot 4 = 2 \cdot 3$

整理して $4x = 22$ よって $x = \frac{11}{2}$

- (2) CO は円 O の半径であるから $CO = 3$ よって $PC = x - 3$

方べきの定理から $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ すなわち $2 \cdot (2+4) = (x-3)(x+3)$
 整理して $x^2 = 21$ $x > 0$ であるから $x = \sqrt{21}$

- (3) 方べきの定理から $PA \cdot PB = PT^2$ すなわち $5(5+x) = 10^2$

整理して $5x = 75$ よって $x = 15$

11 円Oの半径を R cm, 円O'の半径を r cm ($R > r$) とする。

円O, O'と共通外接線との接点を, それぞれA, Bとする。

O'からOAに引いた垂線をO'Hとすると,
 $\angle A = \angle B = 90^\circ$ であるから

$$HO' = AB = 12 \text{ (cm)}$$

$$AH = BO' = r \text{ (cm)}$$

よって $OH = OA - AH = R - r$ (cm)

$\triangle OO'H$ において, $\angle H = 90^\circ$ であるから $OH^2 + HO'^2 = OO'^2$

すなわち $(R - r)^2 + 12^2 = 13^2$

ゆえに $(R - r)^2 = 25$

$R - r > 0$ であるから $R - r = 5$ …… ①

円O, O'と共通内接線との接点を, それぞれC, Dとする。

OからO'Dの延長に引いた垂線をOKとすると,
 $\angle C = \angle D = 90^\circ$ であるから

$$OK = CD = 9 \text{ (cm)}$$

$$KD = OC = R \text{ (cm)}$$

よって $KO' = KD + DO' = R + r$ (cm)

$\triangle O'OK$ において, $\angle K = 90^\circ$ であるから $OK^2 + KO'^2 = OO'^2$

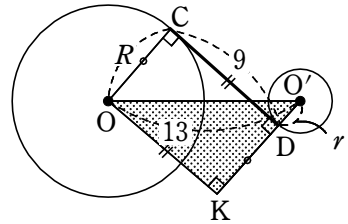
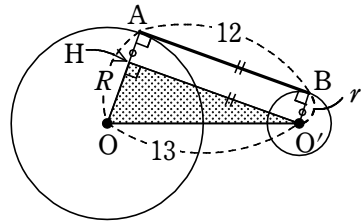
すなわち $9^2 + (R + r)^2 = 13^2$

ゆえに $(R + r)^2 = 88$

$R + r > 0$ であるから $R + r = 2\sqrt{22}$ …… ②

①+②から $2R = 2\sqrt{22} + 5$ よって $R = \sqrt{22} + \frac{5}{2}$ (cm)

②-①から $2r = 2\sqrt{22} - 5$ よって $r = \sqrt{22} - \frac{5}{2}$ (cm)

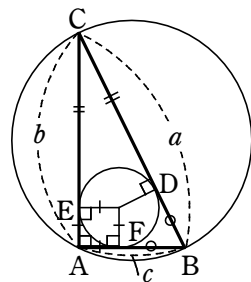


12 (1) $a \geq b \geq c$ であるから, 直角三角形の斜辺の長さは a である。直角三角形の斜辺の長さは外接円の直径の長さと等しいから

$$a = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

(2) 直角三角形を右の図のように $\triangle ABC$ と表し, 内接円との接点を D, E, F と定める。

$AE = \frac{1}{2}$, $AF = \frac{1}{2}$ であるから



$$BD = BF = c - \frac{1}{2},$$

$$CD = CE = b - \frac{1}{2}$$

BD + CD = BC であるから $b + c - 1 = 3$

よって $b + c = 4$ …… ①

また、三平方の定理から $b^2 + c^2 = 3^2$ …… ②

①、② から、 c を消去して $b^2 + (4 - b)^2 = 9$

ゆえに $2b^2 - 8b + 7 = 0$

よって $b = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}$

このとき、① から $c = \frac{4 \mp \sqrt{2}}{2}$ (上の b と複号同順)

$b \geq c$ であるから $b = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$

- 13 (1) 2, x , $4 - x$ が三角形の3辺の長さとなるための条件は、次の3つの不等式が同時に成り立つことである。

$$2 + x > 4 - x \quad \dots\dots ①$$

$$x + (4 - x) > 2 \quad \dots\dots ②$$

$$(4 - x) + 2 > x \quad \dots\dots ③$$

① を解くと $x > 1$

② は、 $4 > 2$ となり常に成り立つ。

③ を解くと $x < 3$

よって、求める x の値の範囲は $1 < x < 3$ …… ④

- (2) $\triangle ABC$ が鋭角三角形となるための条件は、④ および次の3つの不等式が同時に成り立つことである。

$$2^2 < x^2 + (4 - x)^2 \quad \dots\dots ⑤$$

$$x^2 < (4 - x)^2 + 2^2 \quad \dots\dots ⑥$$

$$(4 - x)^2 < x^2 + 2^2 \quad \dots\dots ⑦$$

⑤ から $2(x^2 - 4x + 6) > 0$

$x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2 > 0$ であるから、⑤ は常に成り立つ。

⑥ から $8x - 20 < 0$ よって $x < \frac{5}{2}$ …… ⑥'

⑦ から $8x - 12 > 0$ よって $x > \frac{3}{2}$ …… ⑦'

④、⑥'、⑦' の共通範囲を求めて $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

14 △ABCと直線PEにメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PA} \cdot \frac{AD}{DC} \cdot \frac{CE}{EB} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{BP}{PA} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

ゆえに、 $\frac{BP}{PA} = 3$ から $BP : PA = 3 : 1$

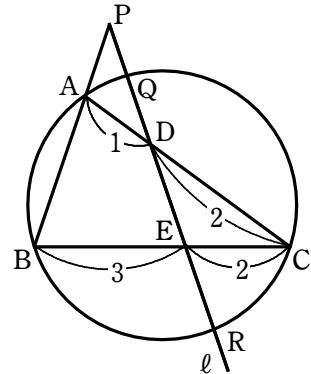
よって、 $AB : AP = 2 : 1$ であり、 $AB = 8$ であるから

$$AP = 4$$

方べきの定理により $PA \cdot PB = PQ \cdot PR$

すなわち $4 \cdot 12 = 3 \cdot (3 + QR)$

よって $QR = 13$



15 (1) ADは∠BACの二等分線であるから、

∠DAB = αとおくと ∠DAC = α

また、AE、ACは円Gの接線であるから、

∠EAG = βとおくと ∠CAG = β

ここで、

$$\angle BAD + \angle DAC + \angle CAG + \angle GAE = 180^\circ$$

であるから $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ$

よって $\alpha + \beta = 90^\circ$

すなわち

$$\angle DAG = \angle DAC + \angle CAG = 90^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また $\angle ADF = 90^\circ$, $\angle GFD = 90^\circ \quad \dots\dots \textcircled{2}$

よって、①、②より、四角形ADFGは長方形である。

したがって $AD = GF$

$$(2) AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{7^2 - 3^2} = 2\sqrt{10}$$

BIは∠ABDの二等分線であるから

$$AI : ID = AB : BD = 7 : 3$$

$$\text{よって} \quad AI = \frac{7}{10}AD = \frac{7}{10} \times 2\sqrt{10} = \frac{7\sqrt{10}}{5}$$

(1)より、四角形ADFGは長方形であるから

$$AG \parallel BF$$

ゆえに $\angle AGB = \angle GBF$

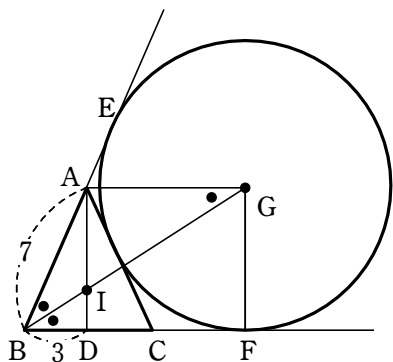
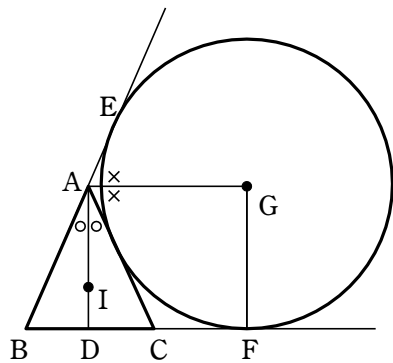
また $\angle ABG = \angle GBF$

よって $\angle AGB = \angle ABG$

したがって、△ABGは二等辺三角形であるから $AG = AB = 7$

△AIGにおいて、三平方の定理により

$$IG = \sqrt{AI^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{10}}{5}\right)^2 + 7^2} = \frac{7\sqrt{35}}{5}$$



16 円 C, C_1, C_2, C_3 の中心をそれぞれ O, O_1, O_2, O_3

とし、2円 C_1, C_2 の接点を H とする。

このとき $OO_1=1-a, O_1O_3=a+2a=3a$

$\triangle OO_1H$ において、三平方の定理から

$$OH = \sqrt{(1-a)^2 - a^2} = \sqrt{1-2a}$$

また $OO_3=1-2a$

$\triangle O_3O_1H$ において、三平方の定理から

$$O_3H = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a$$

$OH + OO_3 = O_3H$ であるから $\sqrt{1-2a} + (1-2a) = 2\sqrt{2}a$

ゆえに $\sqrt{1-2a} = 2(1+\sqrt{2})a - 1 \dots\dots ①$

① の左辺の根号内が 0 以上であることから $0 < a \leq \frac{1}{2}$

① の右辺が 0 以上であることから $a \geq \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

よって $\frac{\sqrt{2}-1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2} \dots\dots ②$

① の両辺を平方し、整理すると $2(3+2\sqrt{2})a^2 = (1+2\sqrt{2})a$

$a > 0$ であるから $2(3+2\sqrt{2})a = 1+2\sqrt{2}$

$$\text{よって } a = \frac{1+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})} = \frac{(1+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{2(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2}-5}{2}$$

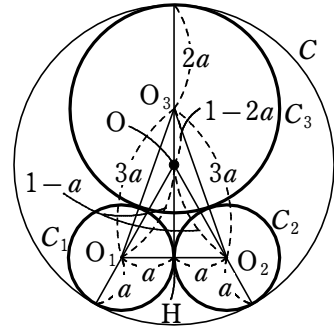
これは ② を満たす。

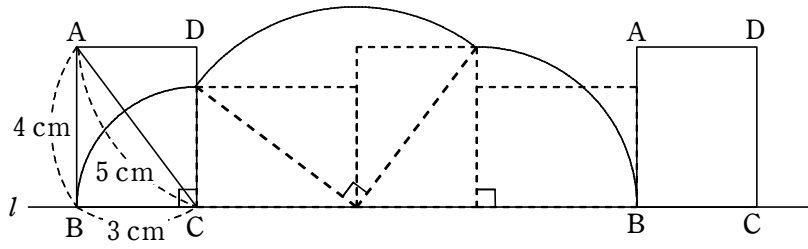
17 求める長さは、下の図の 3 つの弧の長さの和であるから

$$\begin{aligned} & 2\pi \times 3 \times \frac{90}{360} + 2\pi \times 5 \times \frac{90}{360} + 2\pi \times 4 \times \frac{90}{360} \\ & = 6\pi \text{ (cm)} \end{aligned}$$

求める面積は、3 つのおうぎ形と長方形 1 個分であるから

$$\begin{aligned} & \pi \times 3^2 \times \frac{90}{360} + \pi \times 5^2 \times \frac{90}{360} + \pi \times 4^2 \times \frac{90}{360} + 3 \times 4 \\ & = \frac{25}{2}\pi + 12 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$





BASIC+Standard問題

- ① 32351 と 23009 の最大公約数を求めよ。
- ② 次の方程式の整数解をすべて求めよ。
 - (1) $28x + 95y = 3$
 - (2) $103x - 75y = 7$
- ③ (1) 方程式 $xy - 2x + 5y = 1$ の整数解をすべて求めよ。
 (2) 方程式 $3xy + 3x + y = 5$ を満たす2つの整数 x, y の組をすべて求めよ。
- ④ n は自然数とする。 $n^2 - 28n + 160$ が素数となるような n をすべて求めよ。
- ⑤ (1) 1960 の正の約数の個数を求めよ。
 (2) 1960 の正の約数の総和を求めよ。
- ⑥ n を正の整数とする。 $N = 1890n$ とすると、 \sqrt{N} が整数になるような最小の n の値を求めよ。
- ⑦ $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ を満たす整数の組 (x, y) を求めよ。
- ⑧ 次の等式を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。
 - (1) $xyz = x + y + z \quad (x < y < z)$
 - (2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{4}{3} \quad (x \leq y \leq z)$

実戦問題

- ⑨ $\frac{40}{21}, \frac{16}{39}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち、最も小さいものを求めよ。
- ⑩ 方程式 $48x + 539y = 77$ を満たす整数解 x, y をすべて求めよ。
- ⑪ 次の等式を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$
- ⑫ 自然数 N を5進法で表すと3桁の数 $abc_{(5)}$ になり、7進法で表すと3桁の数 $cab_{(7)}$ になるという。 a, b, c を求めよ。また、 N を10進法で表せ。
- ⑬ $100!$ を素因数分解すると、 $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^{16} \cdot 11^9 \cdot 13^7 \cdots$ となる。 a, b, c の値を求めよ。
- ⑭ 素数 p, q, r に対して $2p^3qr + 19p^2q^2r - 10pq^3r = 111111$ が成り立つとき、 p, q, r の値を求めよ。

- 1 解答 173
- 2 解答 k は整数とする。
 (1) $x=95k+51, y=-28k-15$ (2) $x=75k-56, y=103k-77$
- 3 解答 $(x, y)=(-4, -7), (-2, -1), (4, 1), (-6, 11), (-8, 5), (-14, 3)$
 解答 $(x, y)=(-1, -4), (0, 5)$
- 4 解答 $n=7, 21$
- 5 解答 (1) 24 (2) 5130
- 6 解答 210
- 7 解答 $(x, y)=(1, -2), (1, -4)$
- 8 解答 (1) $(x, y, z)=(1, 2, 3)$ (2) $(x, y, z)=(1, 2, 4)$
- 9 解答 $\frac{273}{8}$
- 10 解答 $x=-77+539t, y=7-48t$ (t は整数)
- 11 解答 $(x, y, z)=(2, 3, 6), (2, 6, 3), (3, 2, 6), (3, 6, 2), (6, 2, 3), (6, 3, 2),$
 $(2, 4, 4), (4, 2, 4), (4, 4, 2), (3, 3, 3)$
- 12 解答 $a=2, b=3, c=1; N=66$
- 13 解答 $a=97, b=48, c=24$
- 14 解答 (ア) 7 (イ) 3 (ウ) 13

$$\begin{aligned} \text{①} \quad & 32351 = 23009 \cdot 1 + 9342 \\ & 23009 = 9342 \cdot 2 + 4325 \\ & 9342 = 4325 \cdot 2 + 692 \\ & 4325 = 692 \cdot 6 + 173 \\ & 692 = 173 \cdot 4 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4 \quad 6 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ 173 \overline{) 692} \quad \overline{) 4325} \quad \overline{) 9342} \quad \overline{) 23009} \quad \overline{) 32351} \\ \underline{692} \quad \underline{4152} \quad \underline{8650} \quad \underline{18684} \quad \underline{23009} \\ 0 \quad 173 \quad 692 \quad 4325 \quad 9342 \end{array}$$

よって、最大公約数は 173

$$\text{②} \quad (1) \quad 28x + 95y = 3 \quad \dots\dots \text{①}$$

$x = 17, y = -5$ は、 $28x + 95y = 1$ の整数解の1つである。

よって $28 \cdot 17 + 95 \cdot (-5) = 1$

両辺に 3 を掛けると

$$28 \cdot 51 + 95 \cdot (-15) = 3 \quad \dots\dots \text{②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ から } 28(x - 51) + 95(y + 15) = 0 \quad \dots\dots \text{③}$$

28 と 95 は互いに素であるから、③ のすべての整数解は

$$x - 51 = 95k, \quad y + 15 = -28k \quad (k \text{ は整数})$$

したがって、① のすべての整数解は

$$x = 95k + 51, \quad y = -28k - 15 \quad (k \text{ は整数})$$

参考 1 28 と 95 に互除法を用いると

$$95 = 28 \cdot 3 + 11 \quad \text{移項すると } 11 = 95 - 28 \cdot 3$$

$$28 = 11 \cdot 2 + 6 \quad \text{移項すると } 6 = 28 - 11 \cdot 2$$

$$11 = 6 \cdot 1 + 5 \quad \text{移項すると } 5 = 11 - 6 \cdot 1$$

$$6 = 5 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると } 1 = 6 - 5 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって } 1 &= 6 - 5 \cdot 1 = 6 - (11 - 6 \cdot 1) \cdot 1 \\ &= 6 \cdot 2 - 11 \cdot 1 = (28 - 11 \cdot 2) \cdot 2 - 11 \cdot 1 \\ &= 28 \cdot 2 - 11 \cdot 5 = 28 \cdot 2 - (95 - 28 \cdot 3) \cdot 5 \\ &= 28 \cdot 17 + 95 \cdot (-5) \end{aligned}$$

参考 2 $a = 28, b = 95$ とおく。

$$11 = 95 - 28 \cdot 3 \text{ より } 11 = b - a \cdot 3 = -3a + b$$

$$\begin{aligned} 6 = 28 - 11 \cdot 2 \text{ より } 6 &= a - (-3a + b) \cdot 2 \\ &= 7a - 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 = 11 - 6 \cdot 1 \text{ より } 5 &= (-3a + b) - (7a - 2b) \\ &= -10a + 3b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 = 6 - 5 \cdot 1 \text{ より } 1 &= (7a - 2b) - (-10a + 3b) \\ &= 17a - 5b \end{aligned}$$

よって、 $17a - 5b = 1$ より $28 \cdot 17 + 95 \cdot (-5) = 1$

$$\text{(2)} \quad 103x - 75y = 7 \quad \dots\dots \text{①}$$

$x = -8, y = -11$ は、 $103x - 75y = 1$ の整数解の1つである。

よって $103 \cdot (-8) - 75 \cdot (-11) = 1$

両辺に7を掛けると

$$103 \cdot (-56) - 75 \cdot (-77) = 7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①-② から $103(x+56) - 75(y+77) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$

103と75は互いに素であるから、③のすべての整数解は

$$x+56=75k, \quad y+77=103k \quad (k \text{ は整数})$$

したがって、①のすべての整数解は

$$x=75k-56, \quad y=103k-77 \quad (k \text{ は整数})$$

参考1 103と75に互除法を用いると

$$103=75 \cdot 1+28 \quad \text{移項すると} \quad 28=103-75 \cdot 1$$

$$75=28 \cdot 2+19 \quad \text{移項すると} \quad 19=75-28 \cdot 2$$

$$28=19 \cdot 1+9 \quad \text{移項すると} \quad 9=28-19 \cdot 1$$

$$19=9 \cdot 2+1 \quad \text{移項すると} \quad 1=19-9 \cdot 2$$

$$\text{よって} \quad 1=19-9 \cdot 2=19-(28-19 \cdot 1) \cdot 2$$

$$=19 \cdot 3-28 \cdot 2=(75-28 \cdot 2) \cdot 3-28 \cdot 2$$

$$=75 \cdot 3-28 \cdot 8=75 \cdot 3-(103-75 \cdot 1) \cdot 8$$

$$=103 \cdot (-8)-75 \cdot (-11)$$

参考2 $a=103, b=75$ とおく。

$$28=103-75 \cdot 1 \text{ より} \quad 28=a-b$$

$$19=75-28 \cdot 2 \text{ より} \quad 19=b-(a-b) \cdot 2$$

$$=-2a+3b$$

$$9=28-19 \cdot 1 \text{ より} \quad 9=(a-b)-(-2a+3b)$$

$$=3a-4b$$

$$1=19-9 \cdot 2 \text{ より} \quad 1=(-2a+3b)-(3a-4b) \cdot 2$$

$$=-8a+11b$$

$$\text{よって, } -8a+11b=1 \text{ より} \quad 103 \cdot (-8)-75 \cdot (-11)=1$$

③ $xy-2x+5y=(x+5)(y-2)+10$ であるから、方程式 $xy-2x+5y=1$ を変形すると

$$(x+5)(y-2)+10=1 \quad \text{すなわち} \quad (x+5)(y-2)=-9$$

x, y は整数であるから、 $x+5, y-2$ はともに整数である。

積が-9になる整数 $x+5, y-2$ の組は

$$(x+5, y-2)=(1, -9), (3, -3), (9, -1), (-1, 9), (-3, 3), (-9, 1)$$

よって、求める整数解は

$$(x, y)=(-4, -7), (-2, -1), (4, 1), (-6, 11), (-8, 5), (-14, 3)$$

$$3xy+3x+y=5 \text{ から} \quad (3x+1)(y+1)=6$$

x は整数であるから、 $3x+1$ は3で割ると1余る整数である。

$$\text{よって} \quad (3x+1, y+1)=(-2, -3), (1, 6)$$

したがって $(x, y) = (-1, -4), (0, 5)$

- ④ $n^2 - 28n + 160 = (n-8)(n-20)$ または $n^2 - 28n + 160 = (8-n)(20-n)$
 $n-8 > n-20, 8-n < 20-n$ であるから, $n^2 - 28n + 160$ が素数であるとき
 $n-20=1$ または $8-n=1$

$n-20=1$ より $n=21, 8-n=1$ より $n=7$

$n=21$ のとき $n^2 - 28n + 160 = 13 \cdot 1 = 13$ (素数)

$n=7$ のとき $n^2 - 28n + 160 = 1 \cdot 13 = 13$ (素数)

よって, 求める自然数 n は $n=7, 21$

- ⑤ 1960 を素因数分解すると $1960 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$

よって, 1960 のすべての正の約数は $(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7+7^2)$ を展開したときの項として1つずつ出てくる。

(1) 1960 の正の約数の個数は $(3+1)(1+1)(2+1) = 4 \times 2 \times 3 = 24$ (個)

(2) 1960 の正の約数の和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7+7^2) = (1+2+4+8)(1+5)(1+7+49) \\ = 15 \times 6 \times 57 = 5130$$

- ⑥ 1890 を素因数分解すると $1890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

1890 に $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ を掛けると, $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ すなわち $(2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)^2$ になる。

よって, n の最小値は $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

- ⑦ 左辺を y について整理すると $y^2 + 2(x+2)y + 5x^2 - 4x + 7 = 0 \dots\dots ①$

y は整数であるから, 判別式 D について, $D \geq 0$ であることが必要。

$$\frac{D}{4} = (x+2)^2 - (5x^2 - 4x + 7) \geq 0$$

すなわち $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$

よって $(2x-1)(2x-3) \leq 0$

ゆえに $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ これを満たす整数 x は $x=1$

このとき, ①は $y^2 + 6y + 8 = 0$

ゆえに $(y+2)(y+4) = 0$ よって $y = -2, -4$

したがって $(x, y) = (1, -2), (1, -4)$

- ⑧ (1) $x < y < z$ であるから $xyz = x + y + z < z + z + z = 3z$

よって, $xyz < 3z$ の両辺を正の数 z で割ると $xy < 3$

これを満たす $x < y$ である自然数 x, y の組は $x=1, y=2$

このとき, 与えられた等式は $2z = 1 + 2 + z$

よって $z = 3$

このとき, $y < z$ を満たす。

したがって $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

(2) $1 \leq x \leq y \leq z$ であるから $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ ……①

よって $\frac{4}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{11}{6x}$

したがって $x \leq \frac{11}{8}$

x は自然数であるから $x=1$

このとき、与えられた等式は $\frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{1}{3}$ ……②

①から $\frac{1}{3} = \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \leq \frac{1}{2y} + \frac{1}{3y} = \frac{5}{6y}$

したがって $y \leq \frac{5}{2}$

y は自然数で、 $1 = x \leq y$ であるから $y=1, 2$

$y=1$ のとき、②から $\frac{1}{3z} = -\frac{1}{6}$

これを満たす自然数 z はない。

$y=2$ のとき、②から $\frac{1}{3z} = \frac{1}{12}$

よって $z=4$ ($y \leq z$ を満たす)

したがって $(x, y, z) = (1, 2, 4)$

□9 求める分数を $\frac{a}{b}$ (a, b は互いに素である自然数) とする。

$\frac{40}{21} \times \frac{a}{b}$ は自然数となるから a は 21 の倍数、 b は 40 の約数 ……①

$\frac{16}{39} \times \frac{a}{b}$ は自然数となるから a は 39 の倍数、 b は 16 の約数 ……②

求める分数 $\frac{a}{b}$ を最小にするには、 a を最小にし、 b を最大にするとよい。

①, ②から

a は 21 と 39 の最小公倍数、 b は 40 と 16 の最大公約数

とすればよい。

よって $a=273, b=8$

したがって、求める分数は $\frac{273}{8}$

□10 方程式を変形して $48x=77(1-7y)$

48 と 77 は互いに素であるから、 $x=77s$ (s は整数) とおける。ゆえに $48s=1-7y$

よって $7y = 1 - 48s = (1 + s) - 49s$

ここで、 $s + 1 = 7t$ (t は整数) とおけるから $y = t - 7s = t - 7(7t - 1) = 7 - 48t$

したがって $x = 77s = 77(7t - 1) = -77 + 539t$ (t は整数)

四 x, y, z を入れ替えても、もとの式と変わらない。

x, y, z は自然数であるから、 $1 \leq x \leq y \leq z$ …… ① と仮定する。

$$\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \quad \dots\dots ②$$

よって $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$
 $\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

ゆえに $x \leq 3$

x は自然数であるから $x = 1, 2, 3$

[1] $x = 1$ のとき

与式から、 $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ となり、これを満たす自然数 y, z はない。

[2] $x = 2$ のとき

与式から $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ …… ③

② から $\frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$

ゆえに $y \leq 4$

y は自然数で $2 = x \leq y$ であるから $y = 2, 3, 4$

$y = 2$ のとき ③ から $\frac{1}{z} = 0$ これを満たす自然数 z はない。

$y = 3$ のとき ③ から $\frac{1}{z} = \frac{1}{6}$ よって $z = 6$ ($y \leq z$ を満たす)

$y = 4$ のとき ③ から $\frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ よって $z = 4$ ($y \leq z$ を満たす)

[3] $x = 3$ のとき

与式から $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ …… ④

② から $\frac{2}{3} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$

ゆえに $y \leq 3$

y は自然数で、 $3 = x \leq y$ であるから $y = 3$

このとき ④ から $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ よって $z = 3$ ($y \leq z$ を満たす)

以上から $(x, y, z) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$

よって、①の条件をはずして考えると、求める x, y, z の組は

(2, 3, 6), (2, 6, 3), (3, 2, 6), (3, 6, 2), (6, 2, 3), (6, 3, 2), (2, 4, 4),
(4, 2, 4), (4, 4, 2), (3, 3, 3)

□ $abc_{(5)}$ は3桁の5進数であるから $1 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 4, 0 \leq c \leq 4$

$cab_{(7)}$ は3桁の7進数であるから $1 \leq c \leq 6, 0 \leq a \leq 6, 0 \leq b \leq 6$

よって $1 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 4, 1 \leq c \leq 4$ …… ①

N を10進法で表すと

$$N = abc_{(5)} = a \cdot 5^2 + b \cdot 5^1 + c \cdot 5^0 = 25a + 5b + c$$

$$N = cab_{(7)} = c \cdot 7^2 + a \cdot 7^1 + b \cdot 7^0 = 49c + 7a + b$$

よって $25a + 5b + c = 49c + 7a + b$

整理すると $9a + 2b = 24c$ …… ②

ここで、①から

$$24c = 9a + 2b \leq 9 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 44$$

ゆえに $c \leq \frac{11}{6} = 1.8 \dots\dots$

よって、①から $c = 1$

②に代入すると $9a + 2b = 24$

これと①を満たす整数 a, b は $a = 2, b = 3$

したがって $a = 2, b = 3, c = 1$

また $N = 25 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 = 66$

□ 1から100までの自然数うち

2の倍数の個数は、100を2で割った商で 50

2^2 の倍数の個数は、100を 2^2 で割った商で 25

2^3 の倍数の個数は、100を 2^3 で割った商で 12

2^4 の倍数の個数は、100を 2^4 で割った商で 6

2^5 の倍数の個数は、100を 2^5 で割った商で 3

2^6 の倍数の個数は、100を 2^6 で割った商で 1

$100 < 2^7$ であるから、 $2^n (n \geq 7)$ の倍数はない。

よって $a = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$

次に、1から100までの自然数のうち、

3の倍数の個数は、100を3で割った商で 33

3^2 の倍数の個数は、100を 3^2 で割った商で 11

3^3 の倍数の個数は、100を 3^3 で割った商で 3

3^4 の倍数の個数は、100を 3^4 で割った商で 1

$100 < 3^5$ であるから、 $3^n (n \geq 5)$ の倍数はない。

よって $b = 33 + 11 + 3 + 1 = 48$

更に、1 から 100 までの自然数のうち、

5 の倍数の個数は、100 を 5 で割った商で 20

5^2 の倍数の個数は、100 を 5^2 で割った商で 4

$100 < 5^3$ であるから、 5^n ($n \geq 3$) の倍数はない。

よって $c = 20 + 4 = 24$

□¹⁴ 与えられた等式から $pqr(2p - q)(p + 10q) = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \dots\dots ①$

p, q, r は素数であるから、3, 7, 11, 13, 37 のいずれかである。

また、 $2p - q \geq 1$ であることがわかる。

もし $2p - q = 1$ であるとする、これを満たすのは $p = 7, q = 13$ のときだけである。

このとき $p + 10q = 137$ となり、① を満たさない。

よって、 $2p - q$ は 3, 7, 11, 13, 37 のいずれかであり、更に、

$p + 10q \geq 7 + 10 \cdot 3 = 37$ であるから $p + 10q = 37$

これを満たすのは $p = {}^7 7, q = {}^1 3$

このとき、 $2p - q = 11$ であるから $r = {}^ウ 13$

BASIC問題

- 1 100 から 200 までの整数のうち、次の整数の個数を求めよ。
 - (1) 5 かつ 8 の倍数
 - (2) 5 または 8 の倍数
 - (3) 5 で割り切れるが 8 で割り切れない整数
 - (4) 5 と 8 の少なくとも一方で割り切れない整数
- 2 SHOJI の 5 文字をすべて使用して作成した文字列をアルファベット順の辞書式に並べるとき、JISHO は何番目の文字列であるか。
- 3 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 7 個の数字から異なる 4 個の数字を取り出して 4 桁の整数を作るとき、次のような数は何個あるか。
 - (1) 4 桁の整数
 - (2) 偶数
 - (3) 3200 以上
- 4 正十角形について、次の数を求めよ。
 - (1) 対角線の本数
 - (2) 正十角形の頂点のうちの 3 個を頂点とする三角形の個数
 - (3) (2) の三角形のうち、正十角形と 1 辺だけを共有する三角形の個数
- 5 正四角錐の 5 つの面を、赤青黄緑紫の 5 色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか。
- 6 $x + y + z = 12$ と次の条件を満たす x, y, z の組は、全部で何個あるか。
 - (1) x, y, z は負でない整数
 - (2) x, y, z は自然数

Standard問題

- 7 ATLANTA の 7 文字を 1 列に並べるとき、次の問いに答えよ。
 - (1) 並べ方は、全部で何通りあるか。
 - (2) A が両端にくる並び方は、全部で何通りあるか。
 - (3) T が隣り合わない並び方は、全部で何通りあるか。
- 8 YOKOHAMA の 8 文字を横 1 列に並べて順列を作る。次のような順列は何通りあるか。
 - (1) AA と OO という並びをともに含む順列
 - (2) Y, K, H, M がこの順に並ぶ順列
- 9 NAGOYAJO の 8 個の文字をすべて並べるとき、次の問いに答えよ。
 - (1) AA と OO という並びをともに含む順列は何通りあるか。
 - (2) 同じ文字が隣り合わない順列は何通りあるか。
- 10 正五角柱の 7 つの面を、赤、青、黄、緑、黒、紫の 6 色で塗り分ける。ただし、隣り合う面は異なる色を塗る。また、6 色はすべて使う。なお、回転して同じになるものは同じ塗り方とみなす。このとき次の問いに答えよ。
 - (1) 2 つの五角形の面を同じ色で塗るような、正五角柱の塗り方は何通りあるか。
 - (2) 正五角柱の塗り方の総数は何通りあるか。
- 11 赤玉 6 個、青玉 5 個、黄玉 1 個がある。これらの玉にひもを通して輪をつくる方法は何通りあるか。

12 人を次のように分けるとき、分け方は何通りあるか。

- (1) 5人, 4人, 3人の3つの組に分ける。
- (2) A, B, C, Dの4つの組に, 3人ずつ分ける。
- (3) 3人ずつの4つの組に分ける。
- (4) 8人, 2人, 2人の3つの組に分ける。

次の条件を満たす整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数を求めよ。

- (1) $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq 4$
- (2) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4, a_1 \geq 1, a_i \geq 0 (i=2, 3, 4, 5)$

実戦問題

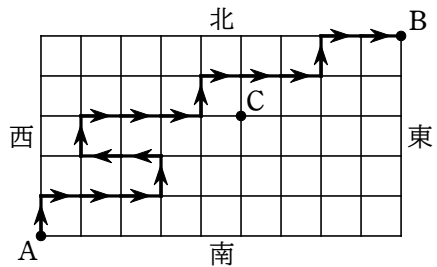
1 から 10 までの自然数の各数字を 1 つずつ記入した 10 枚のカードがある。これらを A, B, C の 3 つの箱に分けて入れる。

- (1) 空の箱があってもよいものとする, 分け方は何通りあるか。
- (2) 空の箱があってはならないとする, 分け方は何通りあるか。

正八面体について考える。ただし, 回転させて一致するものは同じものとする。

- (1) 頂点に 1, 2, …… と順に番号を付けるとき, 番号の付け方は何通りあるか。
- (2) 2 つの面を赤に, 残りの 6 つの面を白に塗るとき, 塗り方は何通りあるか。
- (3) 3 つの面を赤に, 残りの 5 つの面を白に塗るとき, 塗り方は何通りあるか。

右の図のように東西に 6 本, 南北に 10 本の道がある。東西の道と南北の道の出会う地点を交差点とよび, 隣どうしの交差点を結ぶ道を区間ということにする。A 地点から B 地点に進むとき, 次の問いに答えよ。ただし, どの交差点においても, 東西および北のいずれかに進むことはできるが, 南に進むことはできないとする。



また, 後戻りもできないとする。図の中の太線は道順の例を示したものである。

- (1) A 地点から B 地点へ行く道順の総数を求めよ。
- (2) C 地点を通過して, A 地点から B 地点へ行く道順の総数を求めよ。
- (3) A 地点から B 地点まで 16 区間で行く道順の総数を求めよ。

数学① 第6回試練 場合の数

3 / 11

- 1 解答 (1) 3 (2) 31 (3) 18 (4) 98
- 2 解答 59 番目
- 3 解答 (1) 720 個 (2) 420 個 (3) 440 個
- 4 解答 (1) 35 本 (2) 120 個 (3) 60 個
- 5 解答 30 通り
- 6 解答 (1) 91 個 (2) 55 個
- 7 解答 (1) 420 通り (2) 60 通り (3) 300 通り
- 8 解答 (1) 720 通り (2) 420 通り
- 9 解答 (1) 720通り (2) 5760通り
- 10 解答 (1) 72通り (2) 432通り
- 11 解答 236通り
- 12 解答 (1) 27720 通り (2) 369600 通り (3) 15400 通り (4) 1485 通り
- 13 解答 (1) 56 個 (2) 56 個
- 14 解答 (1) 59049 通り (2) 55980 通り
- 15 解答 (1) 30 通り (2) 3 通り (3) 3 通り
- 16 解答 (1) 100000 通り (2) 59000 通り (3) 3276 通り

- ① 100 から 200 までの整数全体の集合を U とし、そのうち 5 の倍数, 8 の倍数全体の集合をそれぞれ A, B とすると

$$A = \{5 \cdot 20, 5 \cdot 21, \dots, 5 \cdot 40\}, B = \{8 \cdot 13, 8 \cdot 14, \dots, 8 \cdot 25\}$$

ゆえに $n(A) = 40 - 20 + 1 = 21, n(B) = 25 - 13 + 1 = 13$

- (1) 5 かつ 8 の倍数すなわち 40 の倍数全体の集合は $A \cap B$ であり

$$A \cap B = \{40 \cdot 3, 40 \cdot 4, 40 \cdot 5\}$$

よって $n(A \cap B) = 3$

- (2) 5 または 8 の倍数全体の集合は $A \cup B$ であるから

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 21 + 13 - 3 = 31$$

- (3) 5 で割り切れるが 8 で割り切れない整数全体の集合は $A \cap \overline{B}$ であるから

$$n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 21 - 3 = 18$$

- (4) 5 と 8 の少なくとも一方で割り切れない整数全体の集合は $\overline{A \cap B}$ である。

また, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ であるから

$$n(\overline{A \cap B}) = n(\overline{A} \cup \overline{B}) = n(U) - n(A \cap B) = (200 - 100 + 1) - 3 = 98$$

- ② 辞書式に並べたときの 1 番目の文字列は HIJOS

H □ □ □ □ の形の文字列は $4! = 24$ (個)

I □ □ □ □ の形の文字列は 24 個

JH □ □ □ の形の文字列は $3! = 6$ (個)

JIH □ □ の形の文字列は $2! = 2$ (個)

JIO □ □ の形の文字列は 2 個

その次の文字列が JISHO である。

よって, JISHO となるのは $24 + 24 + 6 + 2 + 2 + 1 = 59$ (番目)

- ③ (1) 千の位は 0 を除く 6 通り。よって $6 \times {}_6P_3 = 6 \times 120 = 720$ (個)

- (2) [1] 一の位が 0 のとき, 千, 百, 十の位は, 0 以外の 6 個から 3 個取る順列であるから ${}_6P_3$

- [2] 一の位が 2, 4, 6 のとき, 千の位は, 0 と一の位の数以外の 5 個から 1 個取るから 5 通り。

百と十の位は残りの 5 個から 2 個取る順列で ${}_5P_2$ 通り。

よって $3 \times 5 \times {}_5P_2$

[1], [2] から求める個数は ${}_6P_3 + 3 \times 5 \times {}_5P_2 = 120 + 300 = 420$ (個)

- (3)[1] 千の位が 3 のとき, 百の位は, 2, 4, 5, 6 の 4 個から 1 個取るから 4 通り。

十, 一の位は, 残り 5 個から 2 個取る順列で ${}_5P_2$ 通り。

よって $4 \times {}_5P_2$

- [2] 千の位が 4, 5, 6 のとき, 百, 十, 一の位は残り 6 個から 3 個取る順列で ${}_6P_3$ 通り。

よって $3 \times {}_6P_3$

[1], [2] から $4 \times {}_5P_2 + 3 \times {}_6P_3 = 80 + 360 = 440$ (個)

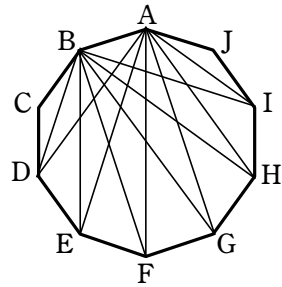
- 4 (1) 異なる10個の点から2個の点を選ぶ方法は ${}_{10}C_2$ 通り
 この中には正十角形の10本の辺がある。

ゆえに ${}_{10}C_2 - 10 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} - 10 = 35$ (本)

- (2) 3個の頂点で三角形が1個できるから、求める個数は

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ (個)}$$

- (3) 正十角形の10個の頂点を図のように定める。このとき、辺ABだけを共有する三角形の第3の頂点の選び方は、A、Bとその両隣の2点C、Jを除くD、E、F、G、H、Iの6通り。



他の辺を共有する場合も同様であるから、求める個数は $6 \times 10 = 60$ (個)

- 5 底面の色の塗り方は 5通り

側面の色の塗り方は、残り4色の円順列であるから $(4-1)!$ 通り
 よって $5 \times (4-1)! = 30$ (通り)

- 6 (1) 求める個数は、 x, y, z の3種類の文字から重複を許して12個取る組合せの数に

等しいから ${}_{3+12-1}C_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 91$ (個)

別解 条件を満たす x, y, z の組は、12個の○と2個の仕切り | の順列を作り、仕切りで分けられた3か所の○の個数を、左から順に x, y, z とすると得られる。

よって、求める個数は、12個の○と2個の | を1列に並べる順列の総数に等しいから

$$\frac{14!}{12!2!} = \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 91 \text{ (個)}$$

- (2) $x-1=X, y-1=Y, z-1=Z$ とおくと $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$

また、 $x+y+z=12$ から $(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=12$

よって $X+Y+Z=9$

この等式を満たす負でない X, Y, Z の組は、(1)と同様に考えて、 X, Y, Z の3種類の文字から重複を許して9個取る組合せの数に等しい。

よって、求める個数は ${}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} = 55$ (個)

別解 条件を満たす x, y, z の組は、12個の○を1列に並べ、その間の11か所のうち2か所に仕切り | を入れ、仕切りで分けられた3か所の○の個数を、左から順に x, y, z とすると得られる。

よって、求める個数は ${}_{11}C_2 = \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} = 55$ (個)

- 7 (1) Aが3文字、Tが2文字、Lが1文字、Nが1文字であるから、求める並べ方の総数は

$$\frac{7!}{3!2!1!1!} = 420 \text{ (通り)}$$

(2) 両端に並べる2文字のAを除いた5文字の並べ方は $\frac{5!}{1!2!1!1!1!} = 60$ (通り)

よって、求める並び方は 60通り

(3) 2文字のTをまとめて一組と考えると、その一組と残り5文字の並べ方は

$$\frac{6!}{3!1!1!1!1!} = 120 \text{ (通り)}$$

よって、Tが隣り合わない並べ方は $420 - 120 = 300$ (通り)

8 (1) 並ぶAAをまとめてA', OOをまとめてO'で表す。

このとき、求める順列は、A', O', Y, K, H, Mの順列であるから、その総数は

$${}_6P_6 = 6! = 720 \text{ (通り)}$$

(2) □4個, O2個, A2個を1列に並べ、4個の□は左からY, K, H, Mとすればよい。

よって、求める順列の総数は

$$\frac{8!}{4!2!2!} = 420 \text{ (通り)}$$

9 (ア) AA, OOをそれぞれ1個の文字とみなして、N, G, Y, J, AA, OOの6個の文字を1列に並べる場合の数を求めると

$$6! = 720 \text{ (個)}$$

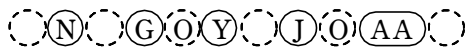
(イ) 8個の文字の順列の総数は

$$\begin{aligned} \frac{8!}{2!2!} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \\ &= 10080 \text{ (個)} \end{aligned}$$

[1] AAの並びを含み、OOの並びを含まないもの

AAを1つの文字とみなし、N, G, Y, J, AAの5個の文字を並べ、その間と両端の6か所から2か所を選んでO, Oを並べればよいから

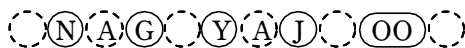
$$\begin{aligned} 5! \times {}_6C_2 &= 120 \times \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \\ &= 1800 \text{ (個)} \end{aligned}$$



[2] OOの並びを含み、AAの並びを含まないもの

OOを1つの文字とみなし、[1]と同様に考えて

$$5! \times {}_6C_2 = 1800 \text{ (個)}$$



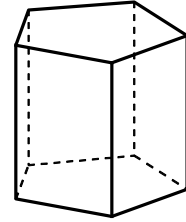
よって、求める個数は

$$10080 - (720 + 1800 \times 2) = 5760 \text{ (個)}$$

10 (ア) 正五角形の面の塗り方は 6通り

そのおのおのについて、側面の長方形の塗り方は5色の円順列となるが、正五角柱をひっくり返すと同じ場合があるから

$$\frac{6 \times (5-1)!}{2} = 72 \text{ (通り)} \dots\dots \textcircled{1}$$



(イ) 2つの正五角形の面を異なる色で塗る場合について考える。

このとき、上面に塗る場合と下面に塗る場合は異なるものと考え、正五角形の面の塗り方は ${}_6P_2$ 通り

そのおのおのについて、

側面の5つの長方形のうちの2つを塗る1色の選び方が4通り、
同色となる長方形の位置の選び方が1通り、
残り3つの長方形の塗り方が ${}_3P_3$ 通り

であるから ${}_6P_2 \times 4 \times 1 \times {}_3P_3$ (通り) あるが、正五角柱をひっくり返すと同じ場合があるから、2つの正五角形の面を異なる色で塗るような、正五角柱の塗り方は

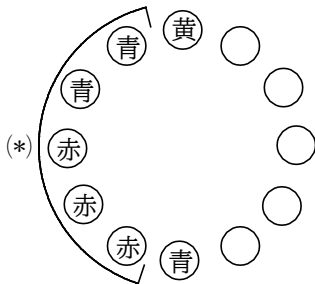
$$\frac{{}_6P_2 \times 4 \times 1 \times {}_3P_3}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 360 \text{ (通り)} \dots\dots \textcircled{2}$$

よって、正五角柱の塗り方の総数は、①、②より $72 + 360 = 432$ (通り)

11 円形に並べる方法は、黄玉を固定して、赤玉6個、青玉5個を並べる並べ方だから、

$$\frac{11!}{6!5!} = 462 \text{ (通り)}$$

円形に並べたとき、左右対称なものは、青玉が5個より、黄玉を固定したときの真正面に青玉がくる。



左の図のように、他の玉の並び方は、(*)の5個が決まれば、向かいの5個も決まるから、

$$\frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ (通り)}$$

一方、左右対称でない円順列は裏返すと同じになるペアがあるから、2で割る。

よって、求める方法は、 $10 + \frac{462-10}{2} = 236$ (通り)

12 (1) 12人から5人を選ぶ方法は ${}_{12}C_5$ 通り

そのどの場合に対しても、残りの7人から4人を選ぶ方法は ${}_7C_4$ 通り
残り3人を最後の1組とする。

$$\text{よって、分け方の総数は } {}_{12}C_5 \times {}_7C_4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 27720 \text{ (通り)}$$

(2) A組の3人の選び方は ${}_{12}C_3$ 通り

B組の3人の選び方は残りの9人から選ぶので ${}_9C_3$ 通り

C組の3人の選び方は残りの6人から選ぶので ${}_6C_3$ 通り

A 組, B 組, C 組の人が決まれば, 残りの D 組の 3 人は決まる。

よって, 分け方の総数は

$${}_{12}C_3 \times {}_9C_3 \times {}_6C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 369600 \text{ (通り)}$$

(3) (2) で, A, B, C, D の区別をなくすと, 4! 通りずつ同じ組分けができる。

よって, 分け方の総数は $\frac{369600}{4!} = \frac{369600}{24} = 15400$ (通り)

(4) A 組 2 人, B 組 2 人, C 組 8 人の 3 つの組に分けることを考え, A, B の区別をなくせばよい。

よって, 分け方の総数は $\frac{{}_{12}C_2 \times {}_{10}C_2}{2!} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} \times \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \times \frac{1}{2 \cdot 1} = 1485$ (通り)

13 (1) 条件を満たす整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数は, 1, 2, 3, 4 の 4 個の数字から重複を許して 5 個取る組合せの数であるから

$${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56 \text{ (個)}$$

(2) $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, b_3 = a_1 + a_2 + a_3, b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$

$b_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ とおくと

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4 \leq b_5 \leq 4$$

よって, この不等式を満たす整数の組 $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ の個数は, (1) から

56 個

ここで, $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ の 1 つの組に対して, $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の組はただ 1 つに決まる。

したがって, 求める組の個数は 56 個

別解 $a_1 - 1 = A, A + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S$ とおく。

求める個数は, $S = 0, 1, 2, 3$ をそれぞれ満たす 0 以上の整数の組

(A, a_2, a_3, a_4, a_5) の総数に等しい。

$S = 3$ のとき, 異なる 5 種類のものから, 重複を許して 3 個取る組合せの数を求めて

$${}_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35 \text{ (個)}$$

$S = 2$ のとき, 同様に考えて ${}_5H_2 = {}_{5+2-1}C_2 = {}_6C_2 = 15$ (個)

$S = 1$ のとき 5 個, $S = 0$ のとき 1 個。以上から 56 個

14 (1) 1 枚のカードを 3 つの箱 A, B, C に入れる方法は 3 通りある。

よって, 10 枚のカードを 3 つの箱 A, B, C に入れる方法は

$$3^{10} = 59049 \text{ (通り)}$$

(2) A を空にして, 10 枚のカードを 2 つの箱 B, C に入れる方法は

$$2^{10} \text{ 通り}$$

この場合において, B, C のうち一方の箱が空になる場合を除いて

$$2^{10} - 2 = 1022 \text{ (通り)}$$

同様に、B だけ、C だけを空にする方法はそれぞれ 1022 (通り)
ゆえに、求める場合の数は

$$1022 \times 3 = 3066 \text{ (通り)}$$

- (3) 2つの箱が空になる場合は 3 通り
よって、空の箱がない場合は

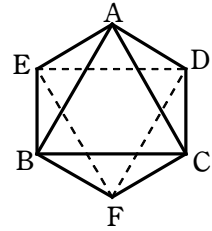
$$59049 - 3066 - 3 = 55980 \text{ (通り)}$$

- 15 (1) 1の番号を付けた頂点を A とし、残りの5つの頂点を、右の図のように B, C, D, E, F とする。

このとき、頂点 F の番号の付け方は 2 ~ 6 の 5 通り

残りの4つの頂点 B, C, D, E の番号の付け方は、残りの4つの数字の円順列であるから $(4-1)!$ 通り

よって、求める総数は $5 \times (4-1)! = 30$ (通り)

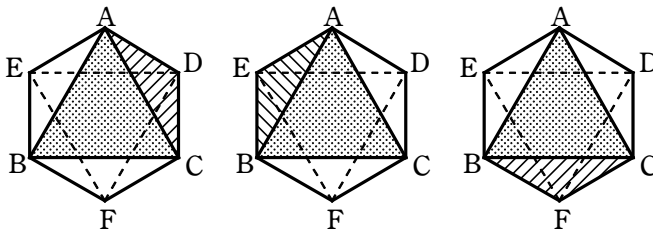


- (2) 面 ABC を赤に塗るとすると、赤に塗るもう1つの選び方は、残りの7つの面の7通りある。

このうち、赤に塗るもう1つの面が、面 ABC と1辺を共有する面、すなわち

面 ACD または 面 AEB または 面 BCF

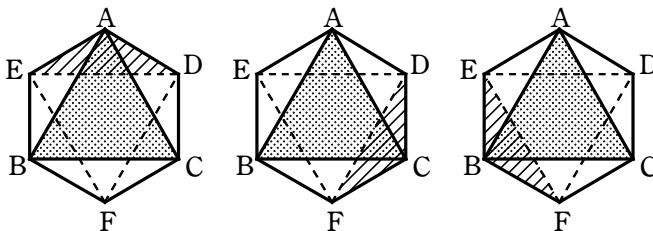
である場合、この3つの塗り方はすべて回転すると一致する。



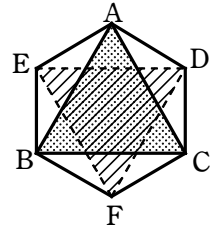
同様に、赤に塗るもう1つの面が、面 ABC と頂点のみを共有する面、すなわち

面 ADE または 面 CDF または 面 EBF

である場合、この3つの塗り方はすべて回転すると一致する。



また、赤に塗るもう1つの面が、面 ABC の対面 DEF である場合、この塗り方は他のどの塗り方とも一致しない。
したがって、求める場合の数は 3 通り



- (3) (2) の 3 通りの場合について、赤に塗るもう 1 つの面の選び方を考える。

[1] 面 ABC と、面 ABC と 1 辺を共有する面 ACD を赤に塗るとき

赤に塗るもう 1 つの面の選び方は、残りの 6 つの面の 6 通りあるが、回転しても一致しない塗り方は、次の (i), (ii) の 2 通りある。

- (i) 面 ADE または 面 AEB または 面 BCF または 面 CDF の場合
- (ii) 面 DEF または 面 EBF の場合

[2] 面 ABC と、面 ABC と頂点のみを共有する面 ADE を赤に塗るとき

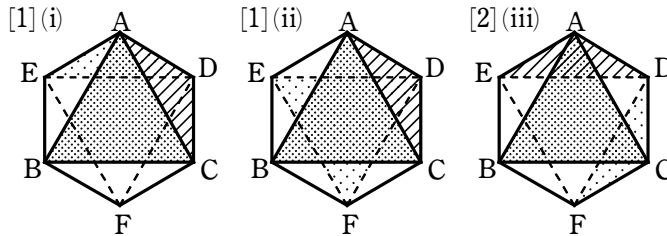
赤に塗るもう 1 つの面の選び方のうち、回転しても一致しない塗り方は、次の (i), (ii), (iii) の 3 通りある。

- (i) 面 ACD または 面 AEB の場合
- (ii) 面 BCF または 面 DEF の場合
- (iii) 面 CDF または 面 EBF の場合

ところが、[2] の (i) の塗り方は [1] の (i) の塗り方と同じであり、[2] の (ii) の塗り方は [1] の (ii) の塗り方と同じである。

[3] 面 ABC と対面 DEF を赤に塗るとき

赤に塗るもう 1 つの面をどのように選んでも、[1] の (ii) と同じ塗り方になる。



したがって、求める場合の数は 3 通り

[16] A 地点が原点、B 地点が (9, 5)、各交差点が格子点になるように座標軸をとる。

- (1) A 地点から $y=1$ 上の格子点への上り方は 10 通り。

同様に、 $y=k$ ($k=1, 2, 3, 4$) 上の格子点から $y=k+1$ 上の格子点への上り方は、各 k に対して 10 通りずつある。

よって、求める総数は $10^5 = 100000$ (通り)

- (2) 点 C (5, 3) を通る行き方は、次の [1], [2], [3] のいずれかである。

数学① 第6回試練 場合の数

[1] (4, 3)からCへ行く。

この行き方は $10^2 \times 5 \times 5 \times 10 = 25000$ (通り)

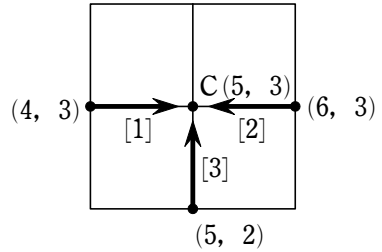
[2] (6, 3)からCへ行く。

この行き方は $10^2 \times 4 \times 6 \times 10 = 24000$ (通り)

[3] (5, 2)からCへ行く。

この行き方は $10^2 \times 1 \times 10^2 = 10000$ (通り)

以上から $25000 + 24000 + 10000 = 59000$ (通り)



(3) 北, 東, 西に1区間進むことをそれぞれ \uparrow , \rightarrow , \leftarrow で表すことにする。

16区間で行く道順は $\uparrow 5$ 個, $\rightarrow 10$ 個, $\leftarrow 1$ 個の順列で表される。また, 「 $\uparrow \leftarrow \uparrow$ 」という並びが必ず1個あり, この並びの前後のそれぞれに \rightarrow が少なくとも1個ある。

「 $\uparrow \leftarrow \uparrow$ 」1個, $\rightarrow 10$ 個, $\uparrow 3$ 個の順列の総数は

$$\frac{14!}{10!3!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4004 \text{ (通り)}$$

このうち, 「 $\uparrow \leftarrow \uparrow$ 」の前に \rightarrow がない順列の総数は

「 $\uparrow \leftarrow \uparrow$ 」 $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$

の間と両端の12か所に $\uparrow 3$ 個をおく(1か所に複数個おいてもよい)と考えて

$${}_{12}H_3 = {}_{12+3-1}C_3 = {}_{14}C_3 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364 \text{ (通り)}$$

「 $\uparrow \leftarrow \uparrow$ 」の後ろに \rightarrow がない順列の総数も同様に 364 通り

よって, 求める道順の総数は $4004 - 364 \times 2 = 3276$ (通り)

BASIC問題

- ① 男子3人と女子2人がくじ引きで順番を決めて横1列に並ぶとき、次の場合の確率を求めよ。
- (1) 女子2人が隣り合う。 (2) 男女が交互に並ぶ。
- ② 赤玉と白玉が合わせて10個入った袋がある。この袋の中から玉を3個同時に取り出すとき、赤玉が出ない確率が $\frac{7}{10}$ であるという。袋の中に白玉は何個入っているか。
- ③ 10本のくじの中に、当たりくじが3本入っている。このくじを3本同時に引くとき、次の確率を求めよ。
- (1) 3本ともはずれる確率 (2) 少なくとも1本は当たる確率
- ④ 3個のさいころを投げるとき、次の確率を求めよ。
- (1) 出た目の最小値が3以上である確率
(2) 出た目の最小値が3である確率
- ⑤ A, B 2社が同じ製品を製造している。A社は全製品の60%, B社は全製品の40%を生産している。また、A社の製品中には3%, B社の製品中には6%の不良品が混じっているという。全製品の中から1個を取り出すとき、次の確率を求めよ。
- (1) それが不良品である確率
(2) 不良品であったときに、それがA社の製品である確率

Standard問題

- ⑥ サイコロを続けて4回投げ、1回目, 2回目, 3回目, 4回目に出た目をそれぞれ a, b, c, d とする。次の間に答えよ。
- (1) $a < b < c < d$ となる確率を求めよ。
(2) $a \leq b \leq c \leq d$ となる確率を求めよ。
- ⑦ 箱に2個の赤い玉と $(n-2)$ 個の白い玉が入っている ($n=4, 5, 6, \dots$)。
- (1) 箱から3個の玉を同時に取り出すとき、2個が白、1個が赤となる確率 $P(n)$ を求めよ。
(2) (1)の $P(n)$ が最大になる n を求めよ。
- ⑧ 硬貨を何回か投げ、先に表が2回出るとAの勝ちとし、先に裏が4回出るとBの勝ちとするゲームを考える。次の確率を求めよ。
- (1) 5回目にBが勝つ確率 (2) A, Bそれぞれの勝つ確率

- 9 次の確率を求めよ。
- (1) 2人でジャンケンをするとき、2回続けてアイコになる確率
 - (2) 3人で1回ジャンケンをして、1人の勝者が決まる確率
 - (3) 5人で1回ジャンケンをして、3人の勝者が決まる確率
 - (4) 5人で1回ジャンケンをして、複数の敗者がでて、複数の勝者が残り、次にその勝者のみで2回目のジャンケンをして、1人の勝者が決まる確率

実戦問題

- 10 4つのさいころを同時に振るとき、次の確率を求めよ。
- (1) 4つとも同じ目が出る確率
 - (2) 3つのさいころに同じ目が出て、他の1つにはその目と異なる目が出る確率
 - (3) 2つの異なる目がそれぞれ2つずつ出る確率
 - (4) 2つのさいころに同じ目が出て、他の2つにはその目と異なりかつ互いに異なる目が出る確率
 - (5) 連続した4つの自然数の目が出る確率
- 11 数直線上を点Pが1ステップごとに、 $+1$ または -1 だけそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。数直線上の値が3の点をAとして、PがAにたどり着くと停止する。
- (1) Pが原点Oから出発して、ちょうど5ステップでAにたどり着く確率を求めよ。
 - (2) Pが原点Oから出発して、ちょうど6ステップで値が2の点Bにたどり着く確率を求めよ。
 - (3) Pが原点Oから出発して、8ステップ以上移動する確率を求めよ。
- 12 正四面体ABCDを考える。点Pは時刻0では頂点Aに位置し、1秒ごとにある頂点から他の3頂点のいずれかに、等しい確率で動くとする。このとき、時刻0から時刻 n までの間に、4頂点A, B, C, Dのすべてに点Pが現れる確率を求めよ。ただし、 n は1以上の整数とする。

1 解答 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{10}$

2 解答 9個

3 解答 (1) $\frac{7}{24}$ (2) $\frac{17}{24}$

4 解答 (1) $\frac{8}{27}$ (2) $\frac{37}{216}$

5 解答 (1) $\frac{21}{500}$ (2) $\frac{3}{7}$

6 解答 (1) $\frac{5}{432}$ (2) $\frac{7}{72}$

7 解答 (1) $P(n) = \frac{6(n-3)}{n(n-1)}$ (2) $\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{n^2-3n+2}{n^2-2n-3}$, $n=5$ (3) $n=5, 6$

8 解答 (1) $\frac{1}{8}$ (2) 順に $\frac{13}{16}, \frac{3}{16}$

9 解答 (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{10}{81}$ (4) $\frac{10}{81}$

10 解答 (1) $\frac{1}{216}$ (2) $\frac{5}{54}$ (3) $\frac{5}{72}$ (4) $\frac{5}{9}$ (5) $\frac{1}{18}$

11 解答 (1) $\frac{3}{32}$ (2) $\frac{9}{64}$ (3) $\frac{91}{128}$

12 解答 $1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

1 5人全員の並び方は 5!通り

(1) 女子2人を1組と考えると、この1組と男子3人の並び方は 4!通り
また、1組にした女子2人の並び方は 2通り

よって、求める確率は $\frac{4! \times 2}{5!} = \frac{2}{5}$

(2) 男女が交互に並ぶのは、男女男女男 となる場合である。

男子3人の並び方は 3!通り、女子2人の並び方は 2通り

よって、求める確率は $\frac{3! \times 2}{5!} = \frac{2}{5 \cdot 4} = \frac{1}{10}$

2 白玉が n 個入っているとする。 ($1 \leq n \leq 10$)

起こりうる場合の総数は ${}_{10}C_3$ 通り

赤玉が出ない場合は、白玉を3個取り出す場合であるから、その総数は ${}_n C_3$ 通り

よって $\frac{{}_n C_3}{{}_{10} C_3} = \frac{7}{10}$

ゆえに
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{7}{10}$$

したがって $n(n-1)(n-2) = 9 \cdot 8 \cdot 7$

$1 \leq n \leq 10$ である自然数のうち、この等式を満たすものは $n = 9$ によって、白玉は9個入っている。

③ (1) 「3本ともはずれる」という事象を A とする。

くじを3本同時に引く方法は ${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ (通り)

3本ともはずれる場合は ${}_{7}C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ (通り)

よって $P(A) = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$

(2) 「少なくとも1本は当たる」という事象を B とすると、余事象 \overline{B} は、「3本とも当たらない」、すなわち「3本ともはずれる」という事象 A であるから $P(\overline{B}) = P(A)$

よって、求める確率は $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$

④ (1) 出た目の最小値が3以上であるのは、3個とも3以上の目が出る場合であるから、求

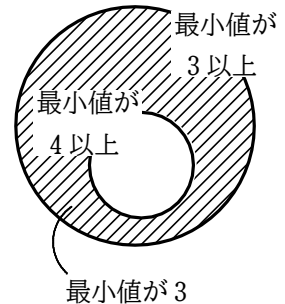
める確率は $\frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$

(2) 出た目の最小値が4以上であるのは、3個とも4以上の目が出る場合である。

このときの確率は $\frac{3^3}{6^3}$

よって、出た目の最小値が3である確率は

$$\frac{4^3}{6^3} - \frac{3^3}{6^3} = \frac{37}{216}$$



⑤ A社の製品であるという事象を A 、B社の製品であるという事象を B 、不良品であるという事象を E とする。

このとき、 A と B は互いに排反であり

$$P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}, P_A(E) = \frac{3}{100}, P_B(E) = \frac{6}{100}$$

(1) 取り出した1個が不良品であるという事象は、次の2つの事象の和事象である。

[1] 不良品がA社の製品の場合

その確率は $P(A \cap E) = P(A)P_A(E) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{100} = \frac{9}{500}$

[2] 不良品がB社の製品の場合

その確率は $P(B \cap E) = P(B)P_B(E) = \frac{2}{5} \times \frac{6}{100} = \frac{12}{500}$

[1], [2] は互いに排反であるから、求める確率は

$$P(E) = \frac{9}{500} + \frac{12}{500} = \frac{21}{500}$$

(2) 求める確率は $P_E(A)$ であるから

$$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{9}{500} \div \frac{21}{500} = \frac{3}{7}$$

□6 すべての目の出方は 6^4 通り

(1) $a < b < c < d$ を満たす目の出方は、1~6から4つの目を選ぶ方法であり、

$${}_6C_4 = 15 \text{ 通り。よって、求める確率は } \frac{15}{6^4} = \frac{5}{432}$$

(2) $a \leq b \leq c \leq d$ を満たす目の出方は、1~6の目の出る回数の定め方である。

それは、1, 2, 3, 4, 5, 6 がそれぞれ x, y, z, u, v, w 回出るとすると

$x + y + z + u + v + w = 4$ (x, y, z, u, v, w は非負整数) を満たすような

(x, y, z, u, v, w) の組数である。これは4つの○を6人で分ける=5か所で仕切る方法、つまり○4つ、|5つを並べる方法と同じ。

$${}_9C_4 = 126 \text{ 通り。よって、求める確率は } \frac{126}{6^4} = \frac{7}{72}$$

□7 (1) 玉は全部で n 個あるから、3個の玉の取り出し方は ${}_n C_3$ 通り。

2個の白玉と1個の赤玉の取り出し方は ${}_{n-2}C_2 \times {}_2C_1$ (通り)

$$\text{よって } P(n) = \frac{{}_{n-2}C_2 \times {}_2C_1}{{}_n C_3} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} \times 2 \div \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{6(n-3)}{n(n-1)}$$

(2) (1) より $P(n+1) = \frac{6\{(n+1)-3\}}{(n+1)\{(n+1)-1\}} = \frac{6(n-2)}{(n+1)n}$ であるから

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{6(n-2)}{(n+1)n} \cdot \frac{n(n-1)}{6(n-3)} = \frac{(n-2)(n-1)}{(n+1)(n-3)} = \frac{n^2-3n+2}{n^2-2n-3}$$

$\frac{P(n+1)}{P(n)} = 1$ となるのは $n^2-3n+2 = n^2-2n-3$ よって $n=5$ のとき。

$n^2-3n+2 - (n^2-2n-3) = 5-n$ であるから

$n=4$ のとき $n^2-3n+2 > n^2-2n-3$, $n=5$ のとき $n^2-3n+2 = n^2-2n-3$,

$n \geq 6$ のとき $n^2-3n+2 < n^2-2n-3$

よって $\frac{P(5)}{P(4)} > 1, \frac{P(6)}{P(5)} = 1, \frac{P(7)}{P(6)} < 1, \frac{P(8)}{P(7)} < 1, \dots$

すなわち $P(4) < P(5) = P(6) > P(7) > P(8) > \dots$

したがって、 $P(n)$ が最大となる n は $n=5, 6$

8 (1) 4回目までに表が1回, 裏が3回出て, 5回目に裏が出る場合である。

よって, 求める確率は ${}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

(2) Bが勝つのは, 4回目に勝つ場合と, 5回目に勝つ場合がある。

Bが4回目に勝つのは, 裏が4回続けて出る場合であるから, その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Bが5回目に勝つ確率は, (1)から $\frac{1}{8}$

よって, Bが勝つ確率は $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$

このゲームに引き分けはないから, Aが勝つ確率は $1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$

9 (1) 2人の1回のジャンケンの手の出し方は 3^2 通り。

1回ジャンケンをしてアイコになる場合は3通り。

よって, 1回のジャンケンでアイコになる確率は $\frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}$

ゆえに, 2回続けてアイコになる確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

(2) 3人のジャンケンの手の出し方は 3^3 通り。

勝者の決まり方は ${}_3C_1$ 通りであり, 勝者の手の出し方は3通りであるから, 1人の勝者が決まる場合は ${}_3C_1 \times 3$ 通り。

ゆえに $\frac{{}_3C_1 \times 3}{3^3} = \frac{1}{3}$

(3) 5人のジャンケンの手の出し方は 3^5 通り。

勝者の決まり方は ${}_5C_3$ 通りであり, 勝者の手の出し方は3通りであるから, 3人の勝者が決まる場合は ${}_5C_3 \times 3$ 通り。

ゆえに $\frac{{}_5C_3 \times 3}{3^5} = \frac{10}{81}$

(4) [1] 1回目の勝者が3人で, 2回目に1人の勝者が決まる確率は, (2), (3)から

$$\frac{10}{81} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{243}$$

[2] 1回目の勝者が2人となる確率は $\frac{{}_5C_2 \times 3}{3^5} = \frac{10}{81}$

残った2人から1人の勝者が決まる確率は $\frac{{}_2C_1 \times 3}{3^2} = \frac{2}{3}$

ゆえに, 1回目の勝者が2人で, 2回目に1人の勝者が決まる確率は

$$\frac{10}{81} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{243}$$

[1], [2] から $\frac{10}{243} + \frac{20}{243} = \frac{30}{243} = \frac{10}{81}$

10 4つのさいころの目の出方は、全部で 6^4 通り

(1) 4つとも同じ目が出る場合は、

$$(1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), \dots, (6, 6, 6, 6)$$

の6通りある。

よって、求める確率は $\frac{6}{6^4} = \frac{1}{216}$

(2) 同じ目が出る3つのさいころを選ぶ方法は ${}_4C_3 = 4$ (通り)

その目の選び方は 6通り

そのおのおのについて、残り1つのさいころの目の出方は 5通り

よって、求める確率は $\frac{4 \times 6 \times 5}{6^4} = \frac{5}{54}$

(3) 2つの異なる目を選ぶ方法は ${}_6C_2 = 15$ (通り)

選んだ2つの目のうち一方の目が出る2つのさいころの選び方は ${}_4C_2 = 6$ (通り)

よって、求める確率は $\frac{15 \times 6}{6^4} = \frac{5}{72}$

(4) 同じ目が出る2つのさいころを選ぶ方法は ${}_4C_2 = 6$ (通り)

その目の選び方は 6通り

そのおのおのについて、残り2つのさいころの目の出方は ${}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20$ (通り)

よって、求める確率は $\frac{6 \times 6 \times 20}{6^4} = \frac{5}{9}$

(5) 連続した4つの自然数となる目の組合せは

$$(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6)$$

の3通りがあり、目の出方はこの各組の順列であるから ${}_4P_4 \times 3 = 4! \times 3$ (通り)

よって、求める確率は $\frac{4! \times 3}{6^4} = \frac{1}{18}$

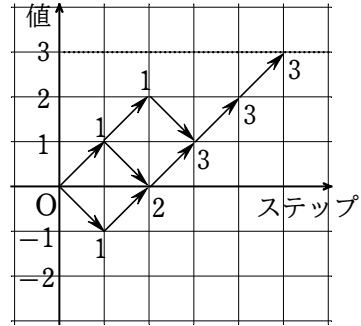
数学① 第7回試練 確率

11 (1) 右の図のように、ステップの数を横軸に、点 P の数直線上の値を縦軸にとったとき、点 P が

+1 だけ進むことは ↗,
-1 だけ進むことは ↘

が対応する。

ちょうど5ステップで値が3の点 A にたどり着くのは図の実線の経路を通る場合で、全部で3通り



1つの経路を通る確率は $\frac{1}{2^5}$ であるから、求める確率は

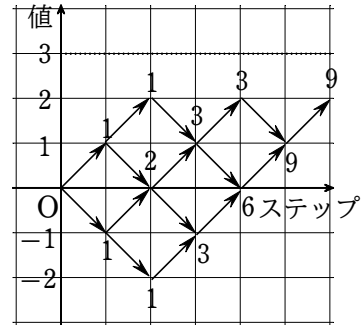
$$\frac{1}{2^5} \times 3 = \frac{3}{32}$$

(2) ちょうど6ステップで値が2の点 B にたどり着くのは、5ステップで値が1の点にたどり着いている場合である。

この場合の数は、右の図から全部で9通り

よって、求める確率は

$$\frac{1}{2^6} \times 9 = \frac{9}{64}$$



(3) 8ステップ以上移動する事象は、7ステップ以下で A にたどり着く場合の余事象である。

A にたどり着くのはステップが奇数回のときであるから、7ステップ以下なら次の [1] ~ [3] のいずれかになる。

[1] 3ステップで A にたどり着く。

+1 が3回続く場合であるから、この確率は $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

[2] 5ステップで A にたどり着く。

この確率は (1) から $\frac{3}{32}$

[3] 7ステップで A にたどり着く。

6ステップで値が2の点にたどり着いているから、この確率は (2) から

$$\frac{9}{64} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{128}$$

以上から、求める確率は $1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \frac{9}{128} \right) = \frac{91}{128}$

12 時刻1で点B, C, Dに動く確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$

時刻1で点Bに動く場合, 時刻 n までの間に4頂点のすべてに点Pが現れる確率は

$$\begin{aligned} & 1 - (\text{CまたはDに行かない確率}) \\ &= 1 - \{(\text{Cに行かない確率}) + (\text{Dに行かない確率}) \\ &\quad - (\text{CにもDにも行かない確率})\} \\ &= 1 - \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} = 1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

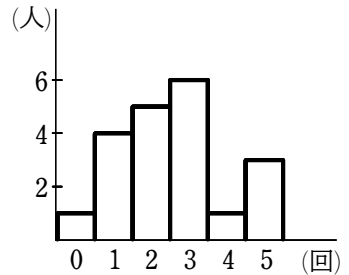
時刻1で点C, Dに動く場合も, 時刻 n までの間に4頂点のすべてに点Pが現れる確率は同じである。

以上から, 求める確率は $\frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \times 3 = 1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

1 次のデータの第1四分位数，第2四分位数，第3四分位数を求めよ。

- (1) 12, 35, 47, 59, 68, 73, 74, 79, 87, 97
- (2) 2, 7, 10, 14, 22, 33, 48, 71, 84, 91, 96, 98

2 右のヒストグラムは，ある高校の生徒 20 人について，ある 5 日間に校内の売店を利用した回数を調べた結果である。



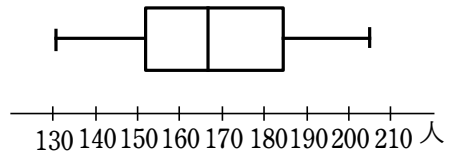
- (1) 利用回数の最頻値，中央値を求めよ。
- (2) 利用回数の平均値を求めよ。

3 次のデータは，ある 10 人の生徒の数学のテストの得点である。ただし， a の値は 0 以上の整数である。

60 74 66 62 82 38 45 41 67 a (点)

- (1) a の値がわからないとき，このデータの中央値として何通りの値があり得るか。
- (2) このデータの平均値が 60.0 点のとき，このデータの中央値を求めよ。

4 右の図は，ある店の 30 日間にわたる来客数のデータの箱ひげ図である。



この箱ひげ図から読み取れることとして正しいものを，次の ①～③ から 1 つ選べ。

- ① 来客数 150 人以上 180 人未満のところには，半分以上の日が分布している。
- ② 来客数が 160 人以上の日が 15 日以上あった。
- ③ 少なくとも 2 日は，来客数が 200 人以上である。

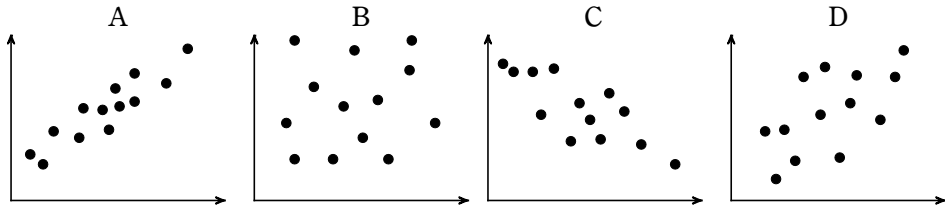
5 次のデータは，あるパズルに挑戦した 10 人について，完成させるまでにかかった時間 x (分) をまとめたものである。ただし， x のデータの平均値を \bar{x} で表し，20 分を超えた人はいなかったものとする。次の問いに答えよ。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
x	13	a	7	3	11	18	7	b	16	3
$(x - \bar{x})^2$	4	c	16	64	0	d	16	1	25	64

- (1) a, b, c, d の値を求めよ。
- (2) x のデータの分散と標準偏差を求めよ。ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ。

- ⑥ 下の A ~ D の散布図と対応する相関係数 r の値の組について適当なものを、次の ① ~ ④の中から選べ。

- ① A : $r=0.8$ B : $r=0.6$ C : $r=-0.6$ D : $r=0.9$
 ② A : $r=0.9$ B : $r=0.1$ C : $r=-0.8$ D : $r=0.6$
 ③ A : $r=0.8$ B : $r=-0.1$ C : $r=0.7$ D : $r=0.7$
 ④ A : $r=-0.9$ B : $r=-0.1$ C : $r=0.8$ D : $r=0.8$



- ⑦ 下の表は、10人の生徒に30点満点の2種類のテストA, Bを行った得点の結果である。テストA, Bの得点をそれぞれ x , y とするとき、 x と y の相関係数 r を求めよ。ただし、小数第3位を四捨五入せよ。

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	29	25	22	28	18	23	26	30	30	29
y	23	23	18	26	17	20	21	20	26	26

- ⑧ 30個の値からなるデータがあり、そのうちの20個の値の平均値は7、分散は5、残り10個の値の平均値は4、分散は8である。
 (1) このデータ全体の平均値を求めよ。 (2) このデータ全体の分散を求めよ。

- ⑨ n 個の値の組として与えられている2つの変数 X , Y に対し、新たな変数 X' , Y' を $X'=aX+b$, $Y'=cY+d$ (a, b, c, d は定数で、 $a \neq 0, c \neq 0$) によって定義する。次の ア ~ ウ に当てはまるものを、下の ① ~ ⑦のうちからそれぞれ1つずつ選べ。

- (1) X' の分散は、 X の分散の ア 倍になる。
 (2) X' と Y' の共分散は、 X と Y の共分散の イ 倍である。
 (3) X' と Y' の相関係数は、 X と Y の相関係数の ウ 倍である。

- ① a ② a^2 ③ ac ④ $\frac{ac}{|ac|}$ ⑤ b ⑥ b^2 ⑦ bd ⑧ $|bd|$

- 1 解答 第1四分位数, 第2四分位数, 第3四分位数の順に
(1) 70.5, 47, 79 (2) 40.5, 12, 87.5
- 2 解答 (1) 最頻値3回, 中央値2.5回 (2) 2.55回
- 3 解答 (1) 7通り (2) 63.5点
- 4 解答 ②
- 5 解答 (1) $a=20$, $b=12$, $c=81$, $d=49$ (2) 32, 5.6分
- 6 解答 ②
- 7 解答 0.77
- 8 解答 (1) 6 (2) 8
- 9 解答 (ア) ① (イ) ② (ウ) ③

① 第1四分位数 Q_1 , 第2四分位数 Q_2 , 第3四分位数 Q_3 は, それぞれ次のようになる。

$$(1) Q_2 = \frac{68+73}{2} = 70.5, Q_1 = 47, Q_3 = 79$$

$$(2) Q_2 = \frac{33+48}{2} = 40.5, Q_1 = \frac{10+14}{2} = 12, Q_3 = \frac{84+91}{2} = 87.5$$

② (1) ヒストグラムから, 最頻値は 3回

利用回数が少ない方から10番目の生徒の利用回数は2回, 11番目の生徒の利用回数は3回である。

$$\text{よって, 中央値は } \frac{1}{2}(2+3) = 2.5 \text{ (回)}$$

$$(2) \text{ 平均値は } \frac{1}{20}(0 \times 1 + 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + 4 \times 1 + 5 \times 3) = \frac{51}{20} = 2.55 \text{ (回)}$$

③ (1) 人数は10人であるから, 小さい方から5番目と6番目の得点の平均値が中央値となる。

a 以外の得点を小さい順に並べると 38, 41, 45, 60, 62, 66, 67, 74, 82

[1] $a \leq 60$ のとき

5番目の得点は60点, 6番目の得点は62点であるから, 中央値は

$$\frac{60+62}{2} = 61 \text{ (点)}$$

[2] $a \geq 66$ のとき

5番目の得点は62点, 6番目の得点は66点であるから, 中央値は

$$\frac{62+66}{2} = 64 \text{ (点)}$$

[3] $61 \leq a \leq 65$ のとき

5番目と6番目の得点は a 点と62点であるから, 中央値は $\frac{a+62}{2}$ (点)

これは, a の値によってすべて異なる。

ゆえに, 中央値は, $2 + (65 - 61 + 1) = 7$ (通り) の値があり得る。

(2) 得点の平均値が60.0点であるとき

$$\frac{1}{10}(38 + 41 + 45 + 60 + 62 + 66 + 67 + 74 + 82 + a) = 60.0$$

これを解いて $a = 65$

$61 \leq a \leq 65$ であるから, 得点の中央値は $\frac{65+62}{2} = 63.5$ (点)

④ ① 第1四分位数は150人以上であるが, 第3四分位数は180人より大きいから, 150人以上180人未満のところに半分以上の日が分布していることは読み取れない。

よって, ①は正しくない。

② 中央値が160人以上であるから, 半分以上の日にちで来客数が160人以上であることが読み取れる。

よって, ②は正しい。

③ 最大値が200人以上であるから, 200人以上の日が少なくとも1日あることが読み取れるが, 2日あるかどうかは読み取れない。

よって、③は正しくない。

以上から、正しいものは②

- ⑤ (1) 番号5のデータに着目すると、 $(11 - \bar{x})^2 = 0$ であるから、平均値 \bar{x} は11(分)

x のデータの総和は $11 \times 10 = 110$

よって $13 + a + 7 + 3 + 11 + 18 + 7 + b + 16 + 3 = 110$

したがって $a = 32 - b$

- (3) 番号6のデータに着目すると、

$$d = (18 - 11)^2 = 7^2 = 49$$

番号8のデータに着目すると、 $(b - 11)^2 = 1$ より $b - 11 = \pm 1$

よって $b = 12$ または $b = 10$

$b = 12$ のとき、 $a = 32 - 12 = 20$ となり、 $a \leq 20$ に適する。

$b = 10$ のとき、 $a = 32 - 10 = 22$ となり、 $a \leq 20$ に適さない。

よって $a = 20$, $b = 12$

$$c = (20 - 11)^2 = 9^2 = 81$$

したがって $a = 20$, $b = 12$, $c = 81$, $d = 49$

- (4) 偏差の2乗の和は

$$4 + 81 + 16 + 64 + 0 + 49 + 16 + 1 + 25 + 64 = 320$$

よって、分散は $\frac{1}{10} \times 320 = 32$

標準偏差は $\sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5.6$ (分)

- ⑥ AとDの散布図では、正の相関関係があるから $r > 0$

また、その傾向はAの方が著しいから、Aの相関係数の方がDの相関係数よりも1に近い。

Cの散布図では、負の相関関係があるから $r < 0$

Bの散布図では、相関が認められないから、相関係数は0に近い。

したがって ②

- ⑦ x, y の平均をそれぞれ \bar{x}, \bar{y} とすると

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(29 + 25 + 22 + 28 + 18 + 23 + 26 + 30 + 30 + 29) = 26$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10}(23 + 23 + 18 + 26 + 17 + 20 + 21 + 20 + 26 + 26) = 22$$

よって、次の表が得られる。

番号	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	3	1	9	1	3
2	-1	1	1	1	-1
3	-4	-4	16	16	16
4	2	4	4	16	8
5	-8	-5	64	25	40
6	-3	-2	9	4	6
7	0	-1	0	1	0
8	4	-2	16	4	-8
9	4	4	16	16	16
10	3	4	9	16	12
計			144	100	92

ゆえに $r = \frac{92}{\sqrt{144 \times 100}} = \frac{92}{12 \times 10} \doteq 0.77$

⑧ (1) 30個の値の和は $7 \times 20 + 4 \times 10 = 180$

よって、このデータ全体の平均値は $\frac{180}{30} = 6$

(2) 20個の値の2乗の平均値を a とすると $a - 7^2 = 5$ よって $a = 54$

残りの10個の値の2乗の平均値を b とすると $b - 4^2 = 8$ よって $b = 24$

よって、30個の値の2乗の和は $a \times 20 + b \times 10 = 54 \times 20 + 24 \times 10 = 1320$

したがって、このデータ全体の分散は $\frac{1320}{30} - 6^2 = 44 - 36 = 8$

⑨ X, Y, X', Y' のそれぞれについて、

平均値を $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{X}', \bar{Y}'$,

分散を $s_X^2, s_Y^2, s_{X'}^2, s_{Y'}^2$ とする。

また、 X と Y の共分散を s_{XY} , 相関係数を r , X' と Y' の共分散を $s_{X'Y'}$, 相関係数を r' とする。

(1) $s_{X'}^2 = a^2 s_X^2$ が成り立つから、 X' の分散は、 X の分散の a^2 倍になる。 (ア ①)

(2) $s_{X'Y'} = ac s_{XY}$ が成り立つから、 X' と Y' の共分散は、 X と Y の共分散の ac 倍である。 (イ ②)

(3) $r' = \frac{s_{X'Y'}}{s_{X'} s_{Y'}} = \frac{ac s_{XY}}{|a| s_X \cdot |c| s_Y} = \frac{ac}{|ac|} r$

よって、 X' と Y' の相関係数は、 X と Y の相関係数の $\frac{ac}{|ac|}$ 倍である。 (ウ ③)

【参考】 (変量の変換)

変量 X, Y が、 n 個の値の組 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ であるとし、
 $k = 1, \dots, n$ に対して、 $X'_k = aX_k + b, Y'_k = cY_k + d$ が成り立つとき

$$\begin{aligned}
ns_{X'}^2 &= (X_1' - \overline{X'})^2 + \cdots + (X_n' - \overline{X'})^2 \\
&= \{(aX_1 + b) - (a\overline{X} + b)\}^2 + \cdots + \{(aX_n + b) - (a\overline{X} + b)\}^2 \\
&= a^2\{(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2\} \\
&= a^2ns_X^2
\end{aligned}$$

よつて、 $s_{X'}^2 = a^2s_X^2$ が成り立つ。

$$\begin{aligned}
ns_{X'Y'} &= (X_1' - \overline{X'})(Y_1' - \overline{Y'}) + \cdots + (X_n' - \overline{X'})(Y_n' - \overline{Y'}) \\
&= \{(aX_1 + b) - (a\overline{X} + b)\}\{(cY_1 + d) - (c\overline{Y} + d)\} \\
&\quad + \cdots + \{(aX_n + b) - (a\overline{X} + b)\}\{(cY_n + d) - (c\overline{Y} + d)\} \\
&= ac\{(X_1 - \overline{X})(Y_1 - \overline{Y}) + \cdots + (X_n - \overline{X})(Y_n - \overline{Y})\} \\
&= acns_{XY}
\end{aligned}$$

よつて、 $s_{X'Y'} = acs_{XY}$ が成り立つ。

BASIC問題

① あるクラス 101 人の中でバナナが好きな人が 43 人、イチゴが好きな人が 39 人、バナナとイチゴ両方が好きな人が 32 人いた。バナナとイチゴがいずれも好きでない人は何人か。

② 命題「 $x > 2$ ならば、 $x^2 > 4$ である」について、その逆、対偶を下の命題 A, B, C, D から選ぶと、逆は \neg , 対偶は \neg である。

A $x \leq 2$ ならば、 $x^2 \leq 4$ である。

B $x^2 \leq 4$ ならば、 $x \leq 2$ である。

C $x^2 < 4$ ならば、 $x < 2$ である。

D $x^2 > 4$ ならば、 $x > 2$ である。

また、命題 A, B, C, D のうち、真であるものは \vee で、他は偽である。

③ 2つの集合 $A = \{2, 4, 3a^3 - 2a^2 - a - 9\}$, $B = \{-4, a, a^2 - 2a + 5, a^2 + a + 7\}$ の共通部分 $A \cap B$ が $\{2, 5\}$ であるとき、 a の値を求めよ。ただし、 a は実数とする。

④ x, y は実数とする。次の にあてはまるものを、下の (a) ~ (d) の中から選べ。

(1) $x > y$ は、 $x^2 > y^2$ であるための .

(2) $x^2 > y^2$ は、 $x^4 > y^4$ であるための .

(3) $x + y > 2$ は、 $x > 1$ または $y > 1$ であるための .

(4) $x < 1$ または $y < 1$ は、 $x^2 + y^2 < 1$ であるための .

(a) 必要条件であるが、十分条件でない

(b) 十分条件であるが、必要条件でない

(c) 必要十分条件である

(d) 必要条件でも十分条件でもない

⑤ 次の命題の否定を作れ。次に、その真偽を判定せよ。

(1) 「すべての実数 x, y について $x^2 + y^2 > 0$ 」

(2) 「ある実数 x について $x^2 - x + 1 > 0$ 」

STANDARD問題

- ⑥ 50人の受験者に A, B, C の3問よりなる試験を行った結果, A の正解者は 31 人, B の正解者は 26 人, C の正解者は 25 人, A, B の正解者は 16 人, A, C の正解者は 12 人, B, C の正解者は 15 人, A, B, C の正解者は 5 人であった。A, B, C 3問とも間違えた者は ア 人で, A のみの正解者は イ 人, A, B が正解で C を間違えた者は ウ 人である。
- ⑦ $a > 0, b > 0$ のとき, $\left(a + \frac{2}{b}\right)\left(b + \frac{8}{a}\right)$ の最小値と, 最小値をとるときの ab の値を求めよ。

実戦問題

- ⑧ a, b, c がすべて 1 より小さい正の数するとき, 3つの不等式

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad b(1-c) > \frac{1}{4}, \quad c(1-a) > \frac{1}{4}$$

が同時には成り立たないことを示せ。

- ⑨ $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ のとき, x, y, z のうち少なくとも 1 つは 1 に等しいことを示せ。

- ⑩ 関数 $f(x) = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$ を考える。

ただし, n は正の整数で, a_1, a_2, \dots, a_n は実数である。

- (1) すべての n に対し, 常に $f(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (2) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$ であることを示せ。
- (3) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$ であれば, a_1, a_2, \dots, a_n はすべて等しいことを示せ。

- 1 解答 51 人
- 2 解答 (ア) D (イ) B (ウ) B, C
- 3 解答 $a=2$
- 4 解答 (1) (d) (2) (c) (3) (b) (4) (a)
- 5 解答 (1) ある実数 x, y について $x^2+y^2 \leq 0$; 真
(2) すべての実数 x について $x^2-x+1 \leq 0$; 偽
- 6 解答 (ア) 6 (イ) 8 (ウ) 11
- 7 解答 $ab=4$ で最小値 18
- 8 解答 略
- 9 解答 略
- 10 解答 (1) 略 (2) 略 (3) 略

- ① クラス全員の集合を全体集合 U とし、バナナが好きな人の集合を A 、イチゴが好きな人の集合を B とすると

$$n(U) = 101, n(A) = 43, n(B) = 39, n(A \cap B) = 32$$

バナナとイチゴがいずれも好きでない人の集合は $\overline{A \cap B}$, すなわち $\overline{A \cup B}$ で表され、その要素の個数は $n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)$

$$\begin{aligned} \text{ここで } n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 43 + 39 - 32 = 50 \end{aligned}$$

$$\text{よって } n(\overline{A \cup B}) = 101 - 50 = 51 \text{ (人)}$$

- ② 逆は「 $x^2 > 4$ ならば $x > 2$ である」 よって D

対偶は「 $x^2 \leq 4$ ならば $x \leq 2$ である」 よって B

命題 A は偽 反例: $x = -3$

命題 B は真 (証明) $x^2 \leq 4$ ならば $-2 \leq x \leq 2$ よって $x \leq 2$

命題 C は真 (証明) $x^2 < 4$ ならば $-2 < x < 2$ よって $x < 2$

命題 D は偽 反例: $x = -3$

したがって、真である命題は B, C

$$A = \{2, 4, 3a^3 - 2a^2 - a - 9\} \quad \dots\dots ①$$

- ③ $B = \{-4, a, a^2 - 2a + 5, a^2 + a + 7\} \quad \dots\dots ②$

$$A \cap B = \{2, 5\} \quad \dots\dots ③$$

$$\text{①, ③ から } 3a^3 - 2a^2 - a - 9 = 5$$

$$\text{よって } (a-2)(3a^2 + 4a + 7) = 0$$

$3a^2 + 4a + 7 = 0$ を満たす実数 a はないから $a = 2$

このとき、 $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{-4, 2, 5, 13\}$ となり、題意を満たす。

ゆえに $a = 2$

別解 ②において $a^2 - 2a + 5 = (a-1)^2 + 4 \geq 4$, $a^2 + a + 7 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} \geq \frac{27}{4} > 6$

よって、②, ③から $a = 2$

このとき、 $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{-4, 2, 5, 13\}$ となり題意を満たす。

ゆえに $a = 2$

4 (1) $A = \{(x, y) \mid x > y\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 > y^2\}$

とおく.

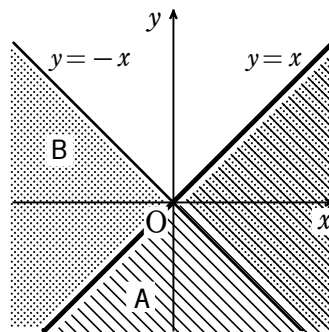
$B = \{(x, y) \mid (x+y)(x-y) > 0\}$ であるから, A, B の領域を図示すると, 右図のようになる.

ただし, 境界線を含まない.

よって, $A \subset B$ も $A \supset B$ も成り立たない.

したがって, 必要条件でも十分条件でもない.

ゆえに (d)



(2) $x^4 > y^4$ が成立するときは, x, y がともに0になることはない.

ゆえに $x^4 > y^4 \iff (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) > 0 \iff x^2 - y^2 > 0$

よって, 必要十分条件である. ゆえに (c)

(3) $C = \{(x, y) \mid x + y > 2\}$,

$D = \{(x, y) \mid x > 1 \text{ または } y > 1\}$ とおく.

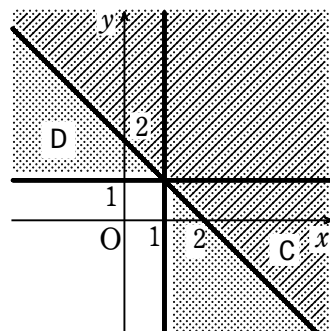
C, D の領域を図示すると右図のようになる.

ただし, 境界線を含まない.

よって, $C \subset D$ は成り立つが, $C \supset D$ は成り立たない.

したがって, 十分条件であるが, 必要条件でない.

ゆえに (b)



(4) $E = \{(x, y) \mid x < 1 \text{ または } y < 1\}$,

$F = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とおく.

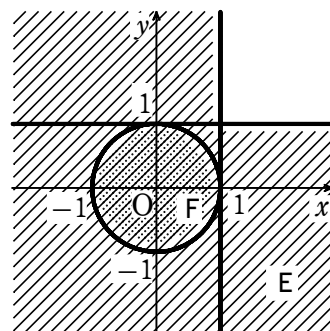
E, F の領域を図示すると, 右図のようになる.

ただし, 境界線を含まない.

よって, $E \subset F$ は成り立たないが, $E \supset F$ は成り立つ.

したがって, 必要条件であるが, 十分条件でない.

ゆえに (a)



5 (1) ある実数 x, y について $x^2 + y^2 \leq 0$

$x = 0, y = 0$ のとき, $x^2 + y^2 \leq 0$ となるから, これは真である.

(2) すべての実数 x について $x^2 - x + 1 \leq 0$

$x = 0$ のとき, $x^2 - x + 1 = 1 > 0$ となるから, これは偽である.

- 6 50人の受験者の集合を全体集合 U とし、そのうち A, B, C の正解者の集合を、それぞれ A, B, C で表すと、条件から

$$n(A) = 31, n(B) = 26, n(C) = 25, n(A \cap B) = 16, n(A \cap C) = 12,$$

$$n(B \cap C) = 15, n(A \cap B \cap C) = 5$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

$$= 31 + 26 + 25 - 16 - 15 - 12 + 5 = 44$$

A, B, C 3問とも間違えた者の集合は、 $\overline{A \cup B \cup C}$ であるから、その人数は

$$n(\overline{A \cup B \cup C}) = n(U) - n(A \cup B \cup C)$$

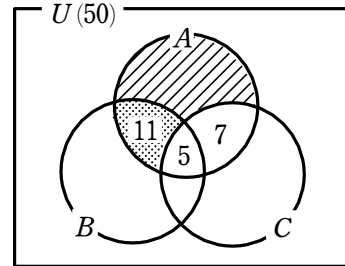
$$= 50 - 44 = 6 \text{ (人)}$$

また、 A のみの正解者の集合は、右の図の斜線部分であるから、その人数は

$$31 - (11 + 5 + 7) = 8 \text{ (人)}$$

A, B が正解で C を間違えた者の集合は、右の図の網点部分であるから、その人数は

$$11 \text{ 人}$$



7 (与式) $= ab + 8 + 2 + \frac{16}{ab} = ab + \frac{16}{ab} + 10$

ここで、 $a > 0, b > 0$ であるから $ab > 0, \frac{16}{ab} > 0$

相加平均と相乗平均の関係により $ab + \frac{16}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{16}{ab}} = 2 \cdot 4 = 8$

ゆえに (与式) $= ab + \frac{16}{ab} + 10 \geq 8 + 10 = 18$

等号が成り立つのは $ab = \frac{16}{ab}$ $ab > 0$ であるから $ab = 4$

よって、 $ab = 4$ で最小値 18 をとる。

8 $a(1-b) > \frac{1}{4}, b(1-c) > \frac{1}{4}, c(1-a) > \frac{1}{4}$ が同時に成り立つと仮定する。

辺々を掛けると $abc(1-a)(1-b)(1-c) > \left(\frac{1}{4}\right)^3 \dots\dots ①$

一方、 $a(1-a) = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ ($0 < a < 1$) より $0 < a(1-a) \leq \frac{1}{4} \dots\dots ②$

同様に $0 < b(1-b) \leq \frac{1}{4} \dots\dots ③, 0 < c(1-c) \leq \frac{1}{4} \dots\dots ④$

②, ③, ④ の辺々を掛けると $0 < abc(1-a)(1-b)(1-c) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3$

これは、① と矛盾する。したがって、同時には成り立たない。

- 9 x, y, z のうち少なくとも1つが1であるための条件は、 $(x-1)(y-1)(z-1)=0$ が成り立つことである。

条件から $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ …… ①

①において、 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}$ であるから $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=1$

よって $xy+yz+zx=xyz$ …… ②

また、①から $x+y+z=1$ …… ③

ゆえに、②、③より

$$\begin{aligned} & (x-1)(y-1)(z-1) \\ &= xyz - (xy+yz+zx) + x+y+z - 1 = xyz - xyz + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

よって、 x, y, z のうち少なくとも1つは1に等しい。

10 (1) $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\dots+(x-a_n)^2\geq 0$

- (2) 2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると、 $f(x)$ の x^2 の係数 n は正であり、常に $f(x)\geq 0$ であることから、 $D\leq 0$ である。

ここで $\frac{D}{4}=(a_1+a_2+\dots+a_n)^2-n(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)$ …… ①

よって、 $D\leq 0$ から $(a_1+a_2+\dots+a_n)^2\leq n(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)$

- (3) 条件と①より、 $D=0$ であるから、方程式 $f(x)=0$ はただ1つの実数解をもつ。

それを $x=x_0$ とすると $f(x_0)=0$

すなわち $(x_0-a_1)^2+(x_0-a_2)^2+\dots+(x_0-a_n)^2=0$

よって $x_0-a_1=x_0-a_2=\dots=x_0-a_n=0$

したがって $a_1=a_2=\dots=a_n$

参考 一般に、実数 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ に対して

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2$$

が成り立つ。(シュワルツの不等式)

本問は、この不等式の $b_1=b_2=\dots=b_n=1$ の場合である。

BASIC問題

1 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$k_n C_k = n_{n-1} C_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

2 次の式の展開式において、[]内に指定された項の係数を求めよ。

$$(1) \left(x - \frac{3}{x}\right)^5 \quad [x] \qquad (2) \left(2x^2 + \frac{3}{x}\right)^6 \quad [x^3]$$

3 $(a+b+c)^8$ の展開式における $a^3 b^3 c^2$ の項の係数を求めよ。

4 異なる n 個のものから r 個取る組合せの総数を ${}_n C_r$ とする。次の式を簡単にせよ。

$$(1) {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \dots + {}_n C_{n-1} + {}_n C_n$$

$$(2) {}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \dots + (-1)^{n-1} {}_n C_{n-1} + (-1)^n {}_n C_n$$

STANDARD問題

5 $(x^2 - x + 2)^4$ の展開式において、次の項の係数を求めよ。

$$(1) x^7 \text{の係数}$$

$$(2) x^5 \text{の係数}$$

6 n は自然数とする。次の式を簡単にせよ。

$$(1) {}_{2n} C_0 + {}_{2n} C_2 + \dots + {}_{2n} C_{2n}$$

$$(2) {}_{2n} C_1 + {}_{2n} C_3 + \dots + {}_{2n} C_{2n-1}$$

7 二項定理を用いて、 11^{25} の一の位の数と十の位の数をそれぞれ求めよ。

8 二項定理を用いて、 13^{13} を 144 で割ったときの余りを求めよ。

9 $(x+2)^{20}$ を展開したときの x^r の係数を $f(r)$ とする。

(1) $0 \leq r \leq 19$ のとき、等式 $f(r+1) - f(r) = \frac{20! \cdot 2^{19-r}}{(20-r)!(r+1)!} g(r)$ を満たす $g(r)$ を求めよ。

(2) (1)を利用して $f(r)$ を最大にする r の値を求めよ。

実戦問題

10 n を 3 以上の自然数とする。

(1) $2 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k について、 $k(k-1)_n C_k = n(n-1)_{n-2} C_{k-2}$ を示せ。

(2) $\sum_{k=1}^n k(k-1)_n C_k$ を求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^n k^2 {}_n C_k$ を求めよ。

数学① 第10回試験 二項定理

2 / 7

- 1 解答 略
- 2 解答 (1) 90 (2) 4320
- 3 解答 560
- 4 解答 (ア) 2^n (イ) 0
- 5 解答 (1) -4 (2) -28
- 6 解答 (1) 略 (2) 略
- 7 解答 一の位の数 $は1$ ，十の位の数 $は5$
- 8 解答 13
- 9 解答 (1) $g(r) = 18 - 3r$ (2) $r = 6, 7$
- 10 解答 (1) 略 (2) $n(n-1) \cdot 2^{n-2}$ (3) $n(n+1) \cdot 2^{n-2}$

① $k_n C_k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n_{n-1} C_{k-1}$

② (1) 展開式の一般項は ${}_5C_r x^{5-r} \left(-\frac{3}{x}\right)^r = {}_5C_r (-3)^r \frac{x^{5-r}}{x^r}$

$\frac{x^{5-r}}{x^r} = x$ とすると、両辺に x^r を掛けて $x^{5-r} = x \cdot x^r$

よって、 $5-r=1+r$ から $r=2$

したがって、 x の係数は ${}_5C_2 (-3)^2 = 10 \times 9 = 90$

(2) 展開式の一般項は ${}_6C_r (2x^2)^{6-r} \left(\frac{3}{x}\right)^r = {}_6C_r \cdot 2^{6-r} \cdot 3^r \frac{x^{12-2r}}{x^r}$

$\frac{x^{12-2r}}{x^r} = x^3$ とすると、両辺に x^r を掛けて $x^{12-2r} = x^3 \cdot x^r$

よって、 $12-2r=3+r$ から $r=3$

したがって、 x^3 の係数は ${}_6C_3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 = 20 \times 8 \times 27 = 4320$

③ $\{(a+b)+c\}^8$ の展開式における c^2 を含む項は ${}_8C_2 (a+b)^6 c^2$

また、 $(a+b)^6$ の展開式における $a^3 b^3$ の項の係数は ${}_6C_3$

よって、 $a^3 b^3 c^2$ の項の係数は ${}_8C_2 \times {}_6C_3 = 560$

【別解】 $(a+b+c)^n$ の展開式における $a^p b^q c^r$ ($p+q+r=n$) の項の係数は

$\frac{n!}{p!q!r!}$ であるから、求める係数は $\frac{8!}{3!3!2!} = 560$

④ 二項定理から

$(a+b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + {}_n C_n b^n \dots \dots \textcircled{1}$

①において、 $a=1, b=1$ とすると

$(1+1)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \dots + {}_n C_{n-1} + {}_n C_n$

すなわち ${}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \dots + {}_n C_{n-1} + {}_n C_n = {}_2^n 2^n$

また、①において、 $a=1, b=-1$ とすると

$(1-1)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 \cdot (-1) + {}_n C_2 \cdot (-1)^2 + \dots + {}_n C_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + {}_n C_n \cdot (-1)^n$

すなわち ${}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \dots + (-1)^{n-1} {}_n C_{n-1} + (-1)^n {}_n C_n = {}_1^0 0$

5 一般項は $\frac{4!}{p!q!r!} \cdot (-1)^q 2^r x^{2p+q}$

(1) x^7 の係数を求めることから, $2p+q=7$ …… ①, $p+q+r=4$ …… ②

p, q, r は $p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0$ の整数 …… ③

① から $q=7-2p$ これを ② に代入すると $p+(7-2p)+r=4$

すなわち $r=p-3$

③ から $q=7-2p \geq 0, r=p-3 \geq 0$ よって $3 \leq p \leq \frac{7}{2}$

p は整数であるから $p=3$

よって $q=1, r=0$

ゆえに 求める係数は, $\frac{4!}{3!1!0!}(-1)^1 \cdot 2^0 = -4$

(2) x^5 の係数を求めることから $2p+q=5$ …… ①, $p+q+r=4$ …… ②,

p, q, r は $p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0$ の整数 …… ③

① から $q=5-2p$ これを ② に代入すると, $p+(5-2p)+r=4$ すなわち $r=p-1$

③ から $q=5-2p \geq 0, r=p-1 \geq 0$ よって $1 \leq p \leq \frac{5}{2}$

p は整数であるから $p=1, 2$

$p=1$ のとき $q=5-2 \cdot 1=3, r=1-1=0$

$p=2$ のとき $q=5-2 \cdot 2=1, r=2-1=1$

すなわち $(p, q, r) = (1, 3, 0), (2, 1, 1)$

よって係数は $\frac{4!}{3!}(-1)^3 2^0 + \frac{4!}{2!}(-1)^1 2^1 = -4 - 24 = -28$

6 (1) 二項定理

$$(a+b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_n b^n$$

において、 $a=1$ 、 $b=-\frac{1}{2}$ とすると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 \left(-\frac{1}{2}\right) + {}_n C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + {}_n C_n \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{すなわち} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n = {}_n C_0 - \frac{{}_n C_1}{2} + \frac{{}_n C_2}{2^2} - \cdots + (-1)^n \frac{{}_n C_n}{2^n}$$

よって、与えられた等式が成り立つ。

(2) 二項定理から

$$(a+b)^{2n} = {}_{2n} C_0 a^{2n} + {}_{2n} C_1 a^{2n-1} b + {}_{2n} C_2 a^{2n-2} b^2 + {}_{2n} C_3 a^{2n-3} b^3 + \cdots + {}_{2n} C_{2n-1} a b^{2n-1} + {}_{2n} C_{2n} b^{2n} \quad \cdots \textcircled{1}$$

①に $a=1$ 、 $b=-1$ を代入すると

$$(1-1)^{2n} = {}_{2n} C_0 - {}_{2n} C_1 + {}_{2n} C_2 - {}_{2n} C_3 + \cdots - {}_{2n} C_{2n-1} + {}_{2n} C_{2n}$$

$$\text{よって} \quad {}_{2n} C_0 + {}_{2n} C_2 + \cdots + {}_{2n} C_{2n} = {}_{2n} C_1 + {}_{2n} C_3 + \cdots + {}_{2n} C_{2n-1}$$

この両辺の値を A とする。

①に $a=1$ 、 $b=1$ を代入すると

$$(1+1)^{2n} = {}_{2n} C_0 + {}_{2n} C_1 + {}_{2n} C_2 + {}_{2n} C_3 + \cdots + {}_{2n} C_{2n-1} + {}_{2n} C_{2n}$$

$$\text{よって} \quad 2^{2n} = ({}_{2n} C_0 + {}_{2n} C_2 + \cdots + {}_{2n} C_{2n}) + ({}_{2n} C_1 + {}_{2n} C_3 + \cdots + {}_{2n} C_{2n-1})$$

$$\text{すなわち} \quad 2^{2n} = 2A \quad \text{よって} \quad A = 2^{2n-1}$$

したがって

$${}_{2n} C_0 + {}_{2n} C_2 + \cdots + {}_{2n} C_{2n} = {}_{2n} C_1 + {}_{2n} C_3 + \cdots + {}_{2n} C_{2n-1} = 2^{2n-1}$$

7 $(1+x)^{25} = {}_{25} C_0 + {}_{25} C_1 x + {}_{25} C_2 x^2 + \cdots + {}_{25} C_{24} x^{24} + {}_{25} C_{25} x^{25}$

ここで $x=10$ とおくと

$$(1+10)^{25} = {}_{25} C_0 + {}_{25} C_1 10 + {}_{25} C_2 10^2 + \cdots + {}_{25} C_{25} 10^{25}$$

$$\text{一の位と十の位の数字に係るものは} \quad {}_{25} C_0 + {}_{25} C_1 \cdot 10 = 1 + 250 = 251$$

したがって一の位の数は1、十の位の数は5

8 二項定理により $13^{13} = (12+1)^{13}$

$$\begin{aligned}
 &= 12^{13} + {}_{13}C_1 \times 12^{12} + \cdots + {}_{13}C_{11} \times 12^2 + {}_{13}C_{12} \times 12 + 1 \\
 &= 12^2(12^{11} + {}_{13}C_1 \times 12^{10} + \cdots + {}_{13}C_{11}) + 13 \times 12 + 1 \\
 &= 12^2(12^{11} + {}_{13}C_1 \times 12^{10} + \cdots + {}_{13}C_{11}) + 12^2 + 13 \\
 &= 144(12^{11} + {}_{13}C_1 \times 12^{10} + \cdots + {}_{13}C_{11} + 1) + 13
 \end{aligned}$$

$12^{11} + {}_{13}C_1 \times 12^{10} + \cdots + {}_{13}C_{11} + 1$ は整数であるから、求める余りは 13

9 (1) $(x+2)^{20}$ の展開式の一般項は ${}_{20}C_r x^r \cdot 2^{20-r}$

よって $f(r) = {}_{20}C_r 2^{20-r} = \frac{20! \cdot 2^{20-r}}{r!(20-r)!}$

$0 \leq r \leq 19$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(r+1) - f(r) &= \frac{20! \cdot 2^{20-(r+1)}}{(r+1)!(20-(r+1))!} - \frac{20! \cdot 2^{20-r}}{r!(20-r)!} \\
 &= \frac{20! \cdot 2^{19-r}}{(r+1)!(19-r)!} - \frac{20! \cdot 2^{20-r}}{r!(20-r)!} \\
 &= \frac{20! \cdot 2^{19-r}}{(20-r)!(r+1)!} \{20-r-2(r+1)\} = \frac{20! \cdot 2^{19-r}}{(20-r)!(r+1)!} (18-3r)
 \end{aligned}$$

よって $g(r) = 18 - 3r$

(2) $\frac{20! \cdot 2^{19-r}}{(20-r)!(r+1)!} > 0$ であるから

$0 \leq r \leq 5$ のとき $g(r) > 0$ から $f(r+1) > f(r)$

$r=6$ のとき $g(r) = 0$ から $f(r+1) = f(r)$

$7 \leq r \leq 19$ のとき $g(r) < 0$ から $f(r+1) < f(r)$

よって $f(0) < f(1) < f(2) < \cdots < f(5) < f(6) = f(7) > f(8) > \cdots > f(20)$

したがって、 $f(r)$ を最大にする r の値は $r=6, 7$

$$\begin{aligned} \boxed{10} (1) \quad k(k-1)_n C_k &= k(k-1) \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= n(n-1) \cdot \frac{(n-2)!}{(k-2)! \{(n-2)-(k-2)\}!} = n(n-1)_{n-2} C_{k-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_{k=1}^n k(k-1)_n C_k &= 1 \cdot 0 \cdot {}_n C_1 + \sum_{k=2}^n k(k-1)_n C_k \\ &= 0 + \sum_{k=2}^n n(n-1)_{n-2} C_{k-2} \quad ((1) \text{より}) \\ &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2} C_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2} C_k &= {}_{n-2} C_0 + {}_{n-2} C_1 + {}_{n-2} C_2 + \cdots + {}_{n-2} C_{n-2} \\ &= (1+1)^{n-2} = 2^{n-2} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \sum_{k=1}^n k(k-1)_n C_k = n(n-1) \cdot 2^{n-2}$$

(3) $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k について

$$\begin{aligned} k_n C_k &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \{(n-1)-(k-1)\}!} = n_{n-1} C_{k-1} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \sum_{k=1}^n k_n C_k = \sum_{k=1}^n n_{n-1} C_{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1} C_k = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^n k^2 {}_n C_k &= \sum_{k=1}^n k(k-1)_n C_k + \sum_{k=1}^n k_n C_k \\ &= n(n-1) \cdot 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1} \\ &= n(n+1) \cdot 2^{n-2} \end{aligned}$$