BASIC問題

1　次の関数に最大値，最小値があればそれを求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=2x^2+8x+9$

(2)　$y=x^2-2x$ $(0\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=-3x^2-2x+4$ $(-1<x<2)$

2　次の不等式を解け。

(1)　$5<x^2+4x\leqq 21$　　(2)　$2x+3<x^2<5$

3　2次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフを y 軸方向に2だけ平行移動したあと，y 軸に関して対称移動させ，更に x 軸方向に -3 だけ平行移動したところ，$y=x^2$ のグラフと一致した．a，b の値を求めよ．

4　グラフが3点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るような2次関数を求めよ。

STANDARD問題

5　2次不等式 $4x^2+ax+b<0$ の解が $1<x<\dfrac{5}{4}$ であるとき，2次不等式 $bx^2+ax+4\geqq 0$ の解を求めよ。

6　a は定数とする。関数 $y=2x^2-4ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

7　次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　2次不等式 $x^2-(m-1)x+3>0$ の解がすべての実数となる。

(2)　2次不等式 $-x^2+2mx+m\geqq 0$ が解をもつ。

8　2次方程式 $x^2-(a+2)x+a(2a+1)=0$ の異なる2つの実数解を α，β とするとき，$1<\alpha<\dfrac{3}{2}<\beta$ を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

9　2次方程式 $x^2-2mx+9=0$ が $2<x<4$ の範囲で異なる2つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

10　2次方程式 $x^2+2ax+2a^2+2ab+4=0$ は，定数 a がどのような実数値であっても実数解をもたないという．実定数 b はどんな範囲にあるか求めよ．

11　$f(x)=-x^2+ax+a-2$，$g(x)=x^2-(a-2)x+3$ について，次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ。

(1)　どんな x の値に対しても $f(x)<g(x)$ が成り立つ。

(2)　どんな x_1，x_2 の値に対しても，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ。

実戦問題

12　x についての次の 2 つの不等式

$$2x^2-3x-5>0$$

$$x^2-(a+2)x+2a<0$$

を同時に満たす整数 x がただ 1 つ存在するとき，定数 a の値の範囲とそのときの整数 x の値を求めよ。

13　2 次不等式 $x^2-2ax+a+2>0$ が $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で常に成り立つとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

14　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ のとき，x の関数 $y=\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ の最小値とそれを与える x の値を求めよ.

1 解答 (1) 最大値はない，$x=-2$ のとき最小値 1

(2) $x=3$ のとき最大値 3，$x=1$ のとき最小値 -1

(3) $x=-\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{13}{3}$，最小値はない

2 解答 (1) $-7\leqq x<-5$，$1<x\leqq 3$　(2) $-\sqrt{5}<x<-1$

3 解答 $a=6$，$b=7$

4 解答 $y=x^2-x+3$

5 解答 $x\leqq\dfrac{4}{5}$，$1\leqq x$

6 解答 (1) $a<0$ のとき $x=0$ で最小値 $-a$，

$0\leqq a\leqq 2$ のとき $x=a$ で最小値 $-2a^2-a$，

$2<a$ のとき $x=2$ で最小値 $-9a+8$

(2) $a<1$ のとき $x=2$ で最大値 $-9a+8$；

$a=1$ のとき $x=0$，2 で最大値 -1；

$1<a$ のとき $x=0$ で最大値 $-a$

7 解答 (1) $1-2\sqrt{3}<m<1+2\sqrt{3}$　(2) $m\leqq -1$，$0\leqq m$

8 解答 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{3}{4}$

9 解答 $3<m<\dfrac{25}{8}$

10 解答 $-2<b<2$

11 解答 (1) $-3<a<3$　(2) $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

12 解答 $-3\leqq a<-2$ のとき $x=-2$，$3<a\leqq 4$ のとき $x=3$

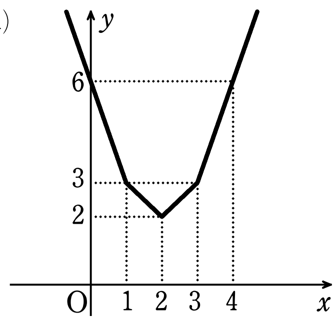
13 解答 $-1<a<3$

14

解答 (1) 〔図〕

(2) $x=n+1$ のとき最小値 n^2+n

(1)



$\boxed{1}$ (1)　$y=2x^2+8x+9$

$=2(x^2+2\cdot2x+2^2)-2\cdot2^2+9$

$=2(x+2)^2+1$

よって，$x=-2$ のとき最小値 1 をとる。

最大値はない。

(2)　$y=x^2-2x$

$=(x^2-2\cdot1x+1^2)-1^2$

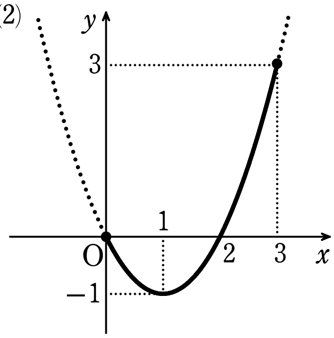
$=(x-1)^2-1$　$(0\leqq x\leqq3)$

よって，グラフは［図］の実線部分である。

ゆえに，$x=3$ のとき最大値 3，

$x=1$ のとき最小値 -1　をとる。

(2)



(3)　$y=-3x^2-2x+4$

$=-3\left\{x^2+2\cdot\dfrac{1}{3}x+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+4$

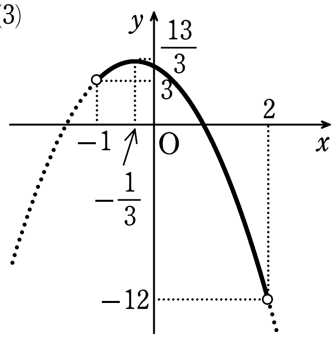
$=-3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{13}{3}$　$(-1<x<2)$

よって，グラフは［図］の実線部分である。

ゆえに，$x=-\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{13}{3}$ をとる。

最小値はない。

(3)



$\boxed{2}$ (1)　$5<x^2+4x\leqq21$ から　$\begin{cases}5<x^2+4x & \cdots\cdots ①\\ x^2+4x\leqq21 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$x^2+4x-5>0$　　よって　$(x+5)(x-1)>0$

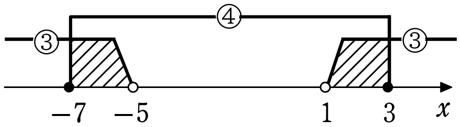
ゆえに　$x<-5,\ 1<x$　……③

② から　$x^2+4x-21\leqq0$　　よって　$(x+7)(x-3)\leqq0$

ゆえに　$-7\leqq x\leqq3$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-7\leqq x<-5,\ 1<x\leqq3$



(2)　$2x+3<x^2<5$ から　$\begin{cases}2x+3<x^2 & \cdots\cdots ①\\ x^2<5 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$x^2-2x-3>0$　　よって　$(x+1)(x-3)>0$

ゆえに　$x<-1,\ 3<x$　……③

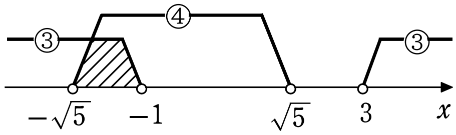
② から　$x^2-5<0$　　$x^2-5=0$ を解くと　$x=\pm\sqrt{5}$

よって，② の解は

$$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5} \quad \cdots\cdots ④$$

③ と ④ の共通範囲を求めて

$$-\sqrt{5}<x<-1$$



3 移動を逆にたどる．

$y=x^2$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動すると，グラフの方程式は　$y=(x-3)^2$

このグラフを y 軸に関して対称移動すると，グラフの方程式は　$y=(-x-3)^2$

すなわち　$y=(x+3)^2$

このグラフを y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，グラフの方程式は　$y=(x+3)^2-2$

すなわち　$y=x^2+6x+7$

これが $y=x^2+ax+b$ と一致するから　$a=6$，$b=7$

4 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

そのグラフが 3 点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るから

$$\begin{cases} 3=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \\ 5=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c \\ 9=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c \end{cases} \text{すなわち} \begin{cases} a+b+c=3 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=5 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=9 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　$3a+b=2$　…… ④

③−② から　$5a+b=4$　…… ⑤

⑤−④ から　$2a=2$　よって　$a=1$

④ から　$3+b=2$　よって　$b=-1$

① から　$1-1+c=3$　よって　$c=3$

したがって，求める 2 次関数は　$y=x^2-x+3$

5 条件から，$y=4x^2+ax+b$ のグラフは $1<x<\dfrac{5}{4}$ の範囲で x 軸より下側にある。

すなわち，2 点 $(1,\ 0)$，$\left(\dfrac{5}{4},\ 0\right)$ を通るから　$4+a+b=0$，$\dfrac{25}{4}+\dfrac{5}{4}a+b=0$

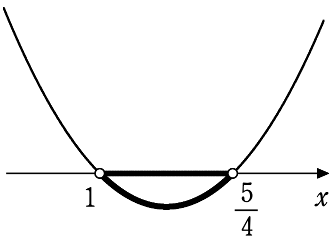
これを解くと　$a=-9$，$b=5$

よって，不等式 $bx^2+ax+4\geqq 0$ は

$$5x^2-9x+4\geqq 0$$

すなわち　$(5x-4)(x-1)\geqq 0$

これを解くと　$x\leqq\dfrac{4}{5}$，$1\leqq x$



6 $y=2x^2-4ax-a$ を変形すると

$$y=2(x-a)^2-2a^2-a$$

この放物線の軸は直線 $x=a$ である。

(1) [1]　$a<0$ のとき

グラフは[図]の実線部分のようになる。

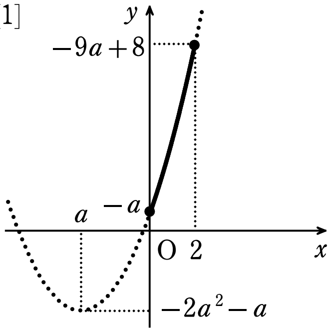
よって，$x=0$ で最小値 $-a$ をとる。

[2]　$0\leqq a\leqq 2$ のとき

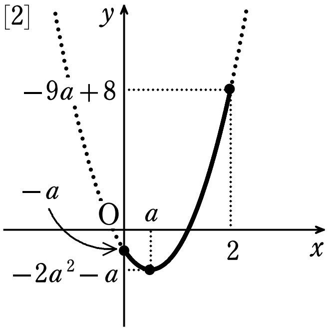
グラフは[図]の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 $-2a^2-a$ をとる。

[1]



[2]



[3]　$2<a$ のとき

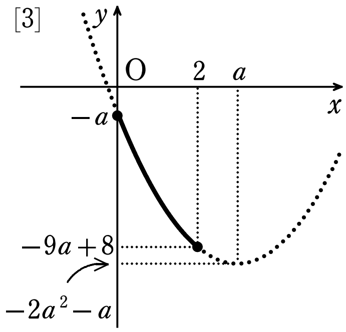
グラフは[図]の実線部分のようになる。

よって，

$x=2$ で最小値 $-9a+8$

をとる。

[3]



以上から

$a<0$ のとき　　$x=0$ で最小値 $-a$

$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^2-a$

$2<a$ のとき　　$x=2$ で最小値 $-9a+8$

(2)　定義域の中央の値は　1

[1]　$a<1$ のとき

グラフは[図]の実線部分のようになる。

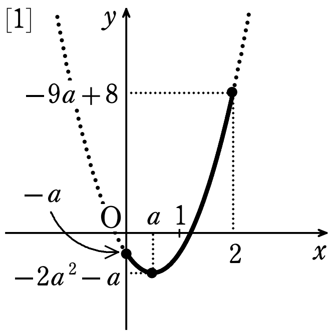
よって，$x=2$ で最大値 $-9a+8$ をとる。

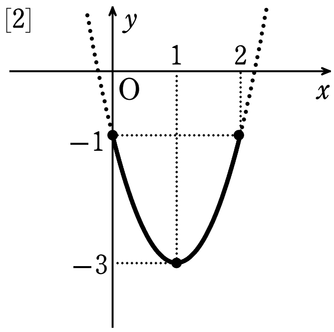
[2]　$a=1$ のとき

$y=2(x-1)^2-3$

グラフは[図]の実線部分のようになる。

よって，$x=0$，2 で最大値 -1 をとる。





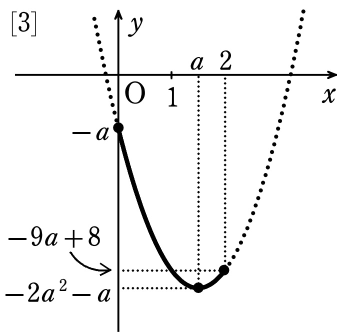
[3]　$1<a$ のとき

グラフは［図］の実線部分のようになる。

よって，

　$x=0$ で最大値 $-a$

をとる。



以上から

$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $-9a+8$

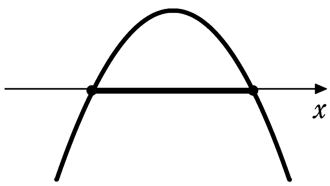
$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 -1

$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 $-a$

$\boxed{7}$ (1)　x^2 の係数は正であるから，この 2 次不等式の解がすべての実数となるための必要十分条件は　$D=\{-(m-1)\}^2-4\cdot1\cdot3<0$　すなわち　$m^2-2m-11<0$

これを解いて　$1-2\sqrt{3}<m<1+2\sqrt{3}$

(2)　この 2 次不等式が解をもつための必要十分条件は，$y=-x^2+2mx+m$ のグラフが x 軸と共有点をもつことである。



すなわち　$D=(2m)^2-4\cdot(-1)\cdot m\geqq0$

よって　$4(m^2+m)\geqq0$

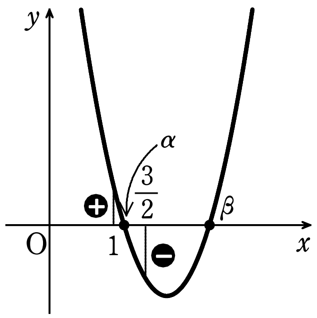
ゆえに　$m(m+1)\geqq0$

したがって　$m\leqq-1$，$0\leqq m$

$\boxed{8}$ $f(x)=x^2-(a+2)x+a(2a+1)$ とする。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，

$1<\alpha<\dfrac{3}{2}<\beta$ となる条件は，右の図より



$$f(1)>0 \quad \text{かつ} \quad f\left(\frac{3}{2}\right)<0$$

ここで　$f(1)=1^2-(a+2)\cdot 1+a(2a+1)=2a^2-1$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-(a+2)\cdot\frac{3}{2}+a(2a+1)$$

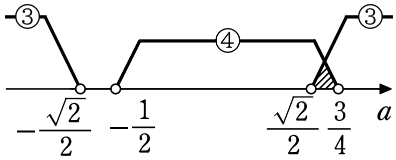
$$=\frac{1}{4}(8a^2-2a-3)$$

$$=\frac{1}{4}(2a+1)(4a-3)$$

であるから　$\begin{cases} 2a^2-1>0 & \cdots\cdots ① \\ (2a+1)(4a-3)<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$a<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a$　$\cdots\cdots$ ③

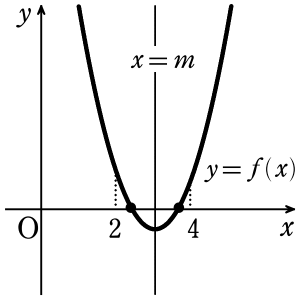
② から　$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{4}$　$\cdots\cdots$ ④



③ と ④ の共通範囲を求めて　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{3}{4}$

$\boxed{9}$ $f(x)=x^2-2mx+9$ とおく。

方程式 $f(x)=0$ が $2<x<4$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $2<x<4$ の範囲と異なる 2 点で交わることである。



$f(x)=0$ の判別式を D とすると，求める条件は

$D>0$

かつ　軸 $x=m$ について　$2<m<4$　$\cdots\cdots$ ①

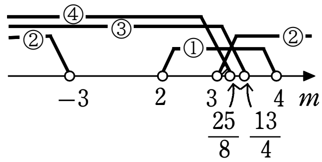
かつ　$f(2)>0$　かつ　$f(4)>0$

$\dfrac{D}{4}=m^2-9=(m+3)(m-3)$ であるから，$D>0$ より

$$m<-3,\ 3<m \quad \cdots\cdots ②$$

$f(2)>0$，$f(4)>0$ から　$-4m+13>0$，$-8m+25>0$

よって　$m<\dfrac{13}{4}$ $\cdots\cdots$ ③，$m<\dfrac{25}{8}$ $\cdots\cdots$ ④



①，②，③，④ の共通範囲を求めて

$$3<m<\frac{25}{8}$$

$\boxed{10}$ $x^2+2ax+2a^2+2ab+4=0$ の判別式を D_1 とすると　$\dfrac{D_1}{4}=a^2-(2a^2+2ab+4)<0$

すなわち　$a^2+2ab+4>0$

この不等式が，どのような a の実数値に対しても成り立つような b の値の範囲を求めればよい.

よって，$a^2+2ab+4=0$ の判別式を D_2 とすると　$\dfrac{D_2}{4}=b^2-4<0$

これを解いて　$-2<b<2$

11 (1)　$g(x)-f(x)=2x^2-2(a-1)x-a+5$

どんな x の値に対しても $f(x)<g(x)$，すなわち $g(x)-f(x)>0$ が成り立つための必要十分条件は　　$D=\{-2(a-1)\}^2-4\cdot2\cdot(-a+5)<0$

整理すると　　$a^2-9<0$　　　　よって　　$(a+3)(a-3)<0$

したがって　　$-3<a<3$

(2)　どんな x_1，x_2 の値に対しても，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つための必要十分条件は，$f(x)$ の最大値より $g(x)$ の最小値の方が大きいことである。

$$f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+a-2,\quad g(x)=\left(x-\frac{a-2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4}+3$$

よって　　$\dfrac{a^2}{4}+a-2<-\dfrac{(a-2)^2}{4}+3$　　　　整理すると　　$a^2-8<0$

ゆえに　　$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})<0$　　　　したがって　　$-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

12 $2x^2-3x-5>0$　……①，$x^2-(a+2)x+2a<0$　……②　とする。

① の左辺を因数分解すると　　$(x+1)(2x-5)>0$

したがって，① の解は　　$x<-1$　または $\dfrac{5}{2}<x$

② の左辺を因数分解すると　　$(x-a)(x-2)<0$

② の解は，$a\neq2$ のとき存在し，

$a<2$ のとき　$a<x<2$

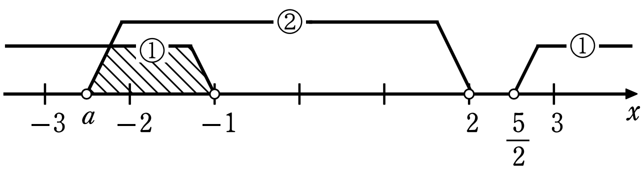
$a>2$ のとき　$2<x<a$

である。

よって，① と ② を同時に満たす整数 x がただ 1 つになるのは，次の各場合である。

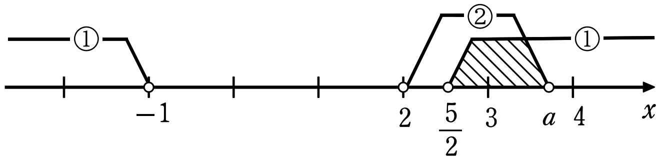
[1]　$-3\leqq a<-2$ のとき

① と ② の解の共通範囲は $a<x<-1$ で，① と ② を同時に満たす整数 x は　　-2



[2]　$3<a\leqq4$ のとき

① と ② の解の共通範囲は $\dfrac{5}{2}<x<a$ で，① と ② を同時に満たす整数 x は　3



$\boxed{13}$ 2 次不等式 $x^2-2ax+a+2>0$ が $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で常に成り立つための条件は，関数 $y=x^2-2ax+a+2$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最小値が 0 より大きいことである。

$f(x)=x^2-2ax+a+2$ とおくと　　$f(x)=(x-a)^2-a^2+a+2$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である。

[1]　$a<-1$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，

$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は

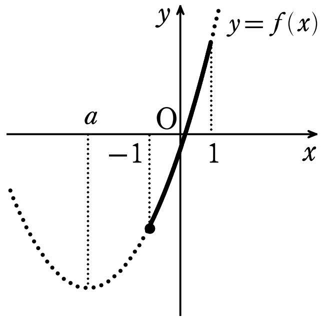
$f(-1)=3a+3$

よって，不等式が常に成り立つとき

$3a+3>0$

ゆえに　　$a>-1$

これは $a<-1$ を満たさない。



[2]　$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，

$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は

$f(a)=-a^2+a+2$

よって，不等式が常に成り立つとき

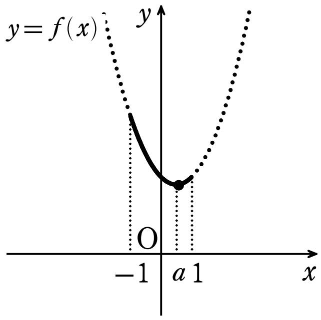
$-a^2+a+2>0$

すなわち　　$a^2-a-2<0$

よって　　$(a+1)(a-2)<0$

ゆえに　　$-1<a<2$

$-1 \leqq a \leqq 1$ との共通範囲は　　$-1<a \leqq 1$



[3]　$1<a$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，

$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は

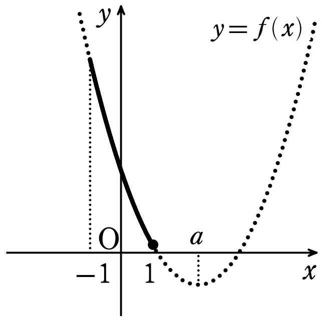
$f(1)=-a+3$

よって，不等式が常に成り立つとき

$-a+3>0$

よって　　$a<3$

$1<a$ との共通範囲は　　$1<a<3$



[1]～[3] より，求める a の値の範囲は　　$-1<a<3$

14 (1)　$x \leqq 1$ のとき

$y=(1-x)+(2-x)+(3-x)=-3x+6$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$y=(x-1)+(2-x)+(3-x)=-x+4$

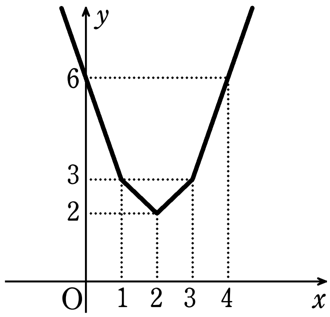
$2 \leqq x \leqq 3$ のとき

$y=(x-1)+(x-2)+(3-x)=x$

$3 \leqq x$ のとき

$y=(x-1)+(x-2)+(x-3)=3x-6$

これらを図示すると図のようになる．



(2)　[1]　$x \leqq 1$ のとき

$$y=\sum_{k=1}^{2n+1}(k-x)=-(2n+1)x+(2n+1)(n+1)$$

$-(2n+1)<0$ であるから，$x=1$ のとき最小値

$-(2n+1)\cdot 1+(2n+1)(n+1)=2n^2+n$ をとる．

[2]　$l \leqq x \leqq l+1$ $(l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2n)$ のとき

$$y=\sum_{k=1}^{l}(x-k)+\sum_{k=l+1}^{2n+1}(k-x)$$

$$=lx-\frac{1}{2}l(l+1)+\frac{1}{2}(2n+1-l)(2n+l+2)-(2n+1-l)x$$

$$=(2l-2n-1)x+\frac{1}{2}\{(2n-l+1)(2n+l+2)-l(l+1)\}$$

$$=\{2l-(2n+1)\}x+2n^2+3n-l^2-l+1$$

(i)　$1 \leqq l \leqq n$ のとき

$2l-(2n+1)<0$ であるから，$x=l+1$ で最小値

$\{2l-(2n+1)\}(l+1)+2n^2+3n-l^2-l+1$

$=l^2-2nl+2n^2+n$

$=(l-n)^2+n^2+n$ をとる．

更に，この式は $1 \leqq l \leqq n$ において，$l=n$ のとき最小値 n^2+n をとる．

(ii)　$n+1 \leqq l \leqq 2n$ のとき

$2l-(2n+1)>0$ であるから，$x=l$ で最小値

$\{2l-(2n+1)\}l+2n^2+3n-l^2-l+1$

$=l^2-2(n+1)l+2n^2+3n+1$

$=\{l-(n+1)\}^2+n^2+n$ をとる．

更に，この式は $n+1 \leqq l \leqq 2n$ において，$l=n+1$ のとき最小値 n^2+n をとる．

[3]　$2n+1 \leqq x$ のとき

$$y=\sum_{k=1}^{2n+1}(x-k)=(2n+1)x-(2n+1)(n+1)$$

$2n+1>0$ であるから，$x=2n+1$ のとき最小値

$(2n+1)(2n+1)-(2n+1)(n+1)=2n^2+n$ をとる．

[1]～[3] において　$2n^2+n > n^2+n$

ゆえに，$x=n+1$ のとき最小値 n^2+n