BASIC問題

1　関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+2}$ が $x=1$ で極大値 1 をとるように，定数 a，b の値を定めよ。
また，このとき，関数 $f(x)$ の極小値を求めよ。

2　関数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2-1}$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

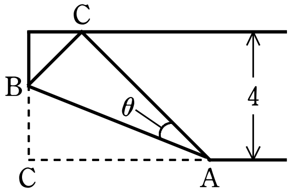
STANDARD問題

3　次の極限値を求めよ。ただし，定理を用いた場合はその名称を明記すること。

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$$

4　点 $(a,\ 0)$ から，関数 $f(x)=(1-x)e^x$ のグラフに引いた接線の本数を求めよ。

5　右の図のように幅 4 のテープを端点 C が辺上にくるように折るとき，△ABC の面積が最小になるような θ とそのときの面積を求めよ。



6　$a>0$，$b>0$ とする。定点 A $(a,\ b)$ を通り，傾き m $(m<0)$ の直線が，x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ P，Q とする。原点を O とするとき，△OPQ の面積 S の最小値を求めよ。

実戦問題

7　a を定数とし，$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+a}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=f(x)$ の変曲点の個数を a の値によって調べよ。

(2)　$a=-1$ のとき，曲線 $y=f(x)$ の漸近線の方程式を求めよ。

8　(1)　x を正の数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ。

(2)　$\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ と $\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ。

9　一直線をなす海岸の地点 A から海岸線に垂直に 9 km 離れた沖の舟に人がいる。この人が，A から海岸に沿って 15 km 離れた地点 B に最短時間で到着するためには，AB 間の A から何 km 離れた地点に上陸すればよいか。ただし，舟の速さを 4 km/時，人の歩く速さを 5 km/時 とする。

$\boxed{1}$ 解答　$a=2$，$b=1$；$x=-2$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{2}$ 解答　$a<-1$，$1<a$

$\boxed{3}$ 解答　1

$\boxed{4}$ 解答　$a<-3$，$1<a$ のとき 2 本；$a=-3$，1 のとき 1 本；$-3<a<1$ のとき 0 本

$\boxed{5}$ 解答　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最小値 $\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$

$\boxed{6}$ 解答　$2ab$

$\boxed{7}$ 解答　(1)　$a<0$ のとき 1 個，$a=0$ のとき 0 個，$a>0$ のとき 3 個

(2)　$x=\pm 1$，$y=x$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$　　(2)　$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$

$\boxed{9}$ 解答　12 km

$\boxed{1}$ $f'(x)=\dfrac{a(x^2+2)-(ax+b)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-ax^2-2bx+2a}{(x^2+2)^2}$

$f(x)$ が $x=1$ で極大値 1 をとるとき　$f'(1)=0$，$f(1)=1$

すなわち　$\dfrac{a-2b}{9}=0$，$\dfrac{a+b}{3}=1$　　これを解くと　$a=2$，$b=1$

このとき　$f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$

$$f'(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 $-\frac{1}{2}$	↗	極大 1	↘

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになり，条件を満たす。

したがって　$a=2$，$b=1$；$x=-2$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{2}$ $x^2-1\neq 0$ であるから，定義域は　$x\neq\pm1$

$$f'(x)=\frac{x^2-1-(x+a)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+2ax+1}{(x^2-1)^2}$$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，2 次方程式 $x^2+2ax+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，その解が 1 または -1 でないことである。

ゆえに，2 次方程式 $x^2+2ax+1=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=a^2-1>0$ ……①，　$1+2a+1\neq 0$ ……②

$1-2a+1\neq 0$ ……③

① から　$a<-1$，$1<a$

このとき，②，③ を満たす。

よって，求める a の値の範囲は　$a<-1$，$1<a$

$\boxed{3}$ $x\longrightarrow +0$ であるから，$x>0$ としてよい。このとき　$\sin x<x$

関数 $f(x)=e^x$ はすべての実数 x で微分可能で，$f'(x)=e^x$ であるから，区間 $[\sin x,\ x]$ において平均値の定理を用いると

$$\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=e^c,\quad \sin x<c<x$$

を満たす実数 c が存在する。

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin x=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to+0}c=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to+0}e^c=e^0=1$

4　$f'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=-te^t(x-t)+(1-t)e^t$$

すなわち　$y=-te^tx+(t^2-t+1)e^t$

この直線が点 $(a,\ 0)$ を通るとき　$-te^ta+(t^2-t+1)e^t=0$　……①

$t=0$ は，この方程式の解ではない。

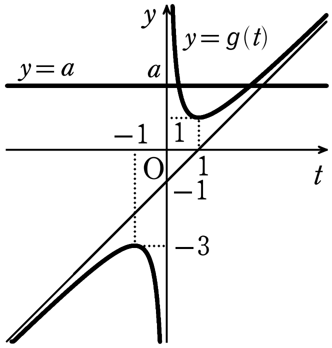
また，$e^t>0$ であるから，方程式①は $a=t-1+\dfrac{1}{t}$ と同値である。

$g(t)=t+\dfrac{1}{t}-1$ とすると　$g'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2}$

$g'(t)=0$ とすると　$t=\pm1$

$g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	-3	↘	／	↘	1	↗



また　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=\infty,\ \lim_{t\to-\infty}g(t)=-\infty,$

$\displaystyle\lim_{t\to+0}g(t)=\infty,\ \lim_{t\to-0}g(t)=-\infty$

よって，$y=g(t)$ のグラフの概形は図のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式 $a=g(t)$ の異なる実数解の個数，すなわち，求める接線の本数に一致する。

したがって，求める接線の本数は，図から

$a<-3,\ 1<a$ のとき 2 本；$a=-3,\ 1$ のとき 1 本；$-3<a<1$ のとき 0 本

別解　①を変形すると　$\{t^2-(a+1)t+1\}e^t=0$

$e^t>0$ であるから　$t^2-(a+1)t+1=0$　……②

曲線 $y=f(x)$ において，接点が異なれば，接線は異なる。

よって，点 $(a,\ 0)$ を通る接線の本数は，t の 2 次方程式②の実数解の個数に等しい。

②の判別式を D とすると

$$D=\{-(a+1)\}^2-4=a^2+2a-3=(a+3)(a-1)$$

したがって，求める接線の本数は

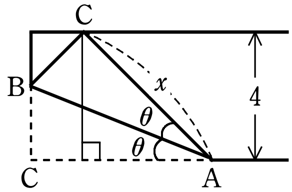
$D>0$　すなわち　$a<-3,\ 1<a$ のとき　2 本

$D=0$　すなわち　$a=-3,\ 1$　のとき　1 本

$D<0$　すなわち　$-3<a<1$　のとき　0 本

5　AC$=x$ とおくと

$$x\sin 2\theta=4,\quad \mathrm{BC}=x\tan\theta$$



$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}x^2\tan\theta$

$$=\frac{8\tan\theta}{\sin^2 2\theta}=\frac{8\sin\theta}{(2\sin\theta\cos\theta)^2\cos\theta}$$

$$=\frac{2}{\sin\theta\cos^3\theta}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$$

ゆえに，$f(\theta)=\sin\theta\cos^3\theta$ が最大のとき S は最小値をとる。

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=\cos\theta\cos^3\theta+\sin\theta\cdot 3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)\\&=\cos^2\theta(\cos^2\theta-3\sin^2\theta)\\&=\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)\\&=\cos^2\theta(2\cos\theta+\sqrt{3})(2\cos\theta-\sqrt{3})\end{aligned}$$

$f(\theta)$ の増減表は右のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	極大	↘	

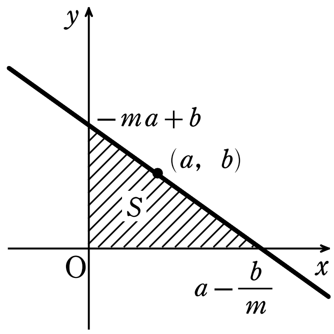
よって，$f(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ をとる。

このとき，S は最小となり，最小値は　$\dfrac{2}{\frac{3\sqrt{3}}{16}}=\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$

6 定点 A$(a,\ b)$ を通り，傾き $m(<0)$ の直線の方程式は

$$y=m(x-a)+b \quad \cdots\cdots ①$$

と表される。



① において　$y=0$ とすると　$x=a-\dfrac{b}{m}$

$x=0$ とすると　$y=-ma+b$

ゆえに　$\mathrm{P}\left(a-\dfrac{b}{m},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(0,\ -ma+b)$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{b}{m}\right)(-ma+b)$

$$=\frac{1}{2}\left(-a^2m-\frac{b^2}{m}+2ab\right)$$

ここで，$f(m)=-a^2m-\dfrac{b^2}{m}+2ab$ とすると

$$f'(m)=-a^2+\frac{b^2}{m^2}=-\frac{(am+b)(am-b)}{m^2}$$

$f(m)$ の増減表は右のようになる。

m	$\cdots$	$-\dfrac{b}{a}$	$\cdots$	0
$f'(m)$	$-$	0	$+$	
$f(m)$	$\searrow$	$4ab$	$\nearrow$	

$f(m)$ の最小値が $4ab$ であるから，S の最小値は

$$\frac{1}{2}\cdot 4ab=2ab$$

このとき　$\mathrm{P}(2a,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2b)$

別解　[S の最小値の計算]

$t=-m$ とおくと，$t>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$2S=a^2t+\frac{b^2}{t}+2ab \geqq 2\sqrt{a^2t\cdot\frac{b^2}{t}}+2ab=4ab$$

等号は $a^2t=\dfrac{b^2}{t}$ すなわち $t=\dfrac{b}{a}$ のとき成り立つ。

このとき，$\mathrm{P}(2a,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2b)$ であり，S の最小値は $2ab$ である。

$\boxed{7}$ (1)　$f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+a)-x^3\cdot 2x}{(x^2+a)^2}=\dfrac{x^4+3ax^2}{(x^2+a)^2}$

$$f''(x)=\frac{(4x^3+6ax)(x^2+a)^2-(x^4+3ax^2)\cdot 2(x^2+a)\cdot 2x}{(x^2+a)^4}$$

$$=\frac{2x\{(2x^2+3a)(x^2+a)-2(x^4+3ax^2)\}}{(x^2+a)^3}=\frac{2ax(3a-x^2)}{(x^2+a)^3}$$

(2)　$f''(x)=-\dfrac{2ax(x^2-3a)}{(x^2+a)^3}$ の符号の変化を調べると

[1]　$a<0$ のとき　　$x^2-3a>0$

よって，$x=0$ の前後で $f''(x)$ の符号は変わるから，変曲点は１個。

[2]　$a=0$ のとき

$f(x)=x$ $(x\fallingdotseq 0)$ であり，変曲点をもたない。

[3]　$a>0$ のとき

$x=-\sqrt{3a}$，0，$\sqrt{3a}$ の前後で $f''(x)$ の符号は変わるから，変曲点は３個。

以上から

$a<0$ のとき１個，$a=0$ のとき０個，$a>0$ のとき３個。

(3)　$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ と表され

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 1-0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to -1+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to -1-0}f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0$$

よって，求める漸近線の方程式は　　$x=\pm 1$，$y=x$

$\boxed{8}$ (1)　$x>0$ のとき，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$ とおくと

$$f(x)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}<0$$

よって，$f(x)$ は単調に減少する。

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$f(x)>0$

したがって　　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$

(2)　$g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ とおく。

$$g(x)=x\{\log(x+1)-\log x\}$$

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

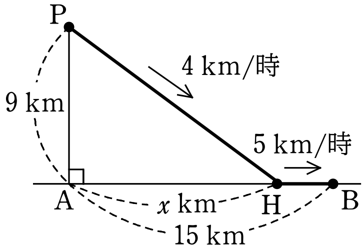
(1)から $g'(x)>0$ となり，$g(x)$ は単調に増加する。

よって　$\dfrac{2001}{2002}<\dfrac{2002}{2001}$　から　$g\left(\dfrac{2001}{2002}\right)<g\left(\dfrac{2002}{2001}\right)$

$$\log\left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\log\left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$$

ゆえに　$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$

9 舟のいる地点を P，上陸すべき地点を H とする。



AH$=x$(km) とすると $0\leqq x\leqq 15$ であり

$$\mathrm{PH}=\sqrt{x^2+9^2},\quad \mathrm{BH}=15-x$$

地点 B に到着するまでの所要時間を t(時間) とすると

$$t=\frac{\sqrt{x^2+9^2}}{4}+\frac{15-x}{5}$$

$$t'=\frac{x}{4\sqrt{x^2+9^2}}-\frac{1}{5}=\frac{5x-4\sqrt{x^2+9^2}}{20\sqrt{x^2+9^2}}$$

$t'=0$ とすると　$5x=4\sqrt{x^2+9^2}$　　両辺を 2 乗して　$25x^2=16(x^2+81)$

よって　$x^2=144$　　$0\leqq x\leqq 15$ から　$x=12$

t の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	12	$\cdots$	15
t'		$-$	0	$+$	
t		↘	極小	↗	

したがって，t は $x=12$ のとき最小となる。

よって，A から 12 km の地点に上陸すればよい。