BASIC問題

1 (1) 定積分 $\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+5)dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_{-1}^{2}(x^2-x)dx-\int_{0}^{2}(x^2-x)dx+\int_{-1}^{0}(2x-1)dx$ を求めよ。

2 等式 $f(x)=1+2\int_{0}^{1}(xt+1)f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

3 等式 $\int_{a}^{x}f(u)du=5x^2-ax-7a-2$ を満たす関数 $f(x)$ と正の定数 a の値を求めよ．

4 定積分 $\int_{0}^{2}|x^2+3x-4|dx$ を求めよ。

5 曲線 $y=(x+1)(x-1)(x-2)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

STANDARD問題

6 xy 平面において，連立不等式 $y\geqq|x^2-1|$，$y\leqq-x^2+2x+3$ の表す領域を Dの面積を求めよ。

7 2つの放物線 $y=-x^2+2x+3$ と $y=-x^2+6x-3$ に共通して接する直線の方程式を求めよ．また，この直線と2つの放物線とで囲まれた部分の面積を求めよ．

8 a，b，c を定数とする。2つの曲線 $y=x^3+ax+b$ と $y=ax^2+bx+c$ が共有点 P(2，19) をもち，点 P において共通の接線をもつとき，次の問いに答えよ。

(1)　a，b，c の値を求めよ。

(2)　2つの曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

9 放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，点 (2，0) を通る直線 g で2等分するとき，g の傾きを求めよ。

実戦問題

10 次の関係式を満たす定数 a および関数 $g(x)$ を求めよ。

$$\int_a^x \{g(t)+tg(a)\}dt = x^2-2x-3$$

11 放物線 L： $y=x^2$ と点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ を中心とする円 C が異なる 2 点で接している。ただし，L と C が点 P で接しているとは，L と C が点 P を共有し，さらに L と C が点 P において共通の接線をもつことを意味する。

(1)　2 つの接点の座標を求めよ。

(2)　円 C の方程式を求めよ。

(3)　2 つの接点を両端とする円 C の短い方の弧と L とで囲まれる図形の面積を求めよ。

12 曲線 $y=x^3-4x^2+4x$ と直線 $y=mx$ とで囲まれてできる 2 つの図形の面積を等しくするように，定数 m $(0<m<4)$ の値を定めよ。

13 関数 $f(x)$ は $\begin{cases} x \leqq 0 \text{ では } f(x)=x(x+1) \\ x \geqq 0 \text{ では } f(x)=x(1-x) \end{cases}$ で与えられるとする.

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフを描け.

(2)　積分 $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,dt$ を求め，曲線 $y=F(x)$ をグラフに示せ.

$\boxed{1}$ 解答　(1)　8　　(2)　$-\dfrac{7}{6}$

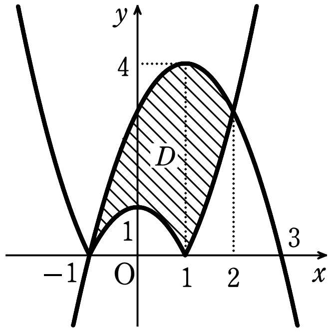
$\boxed{2}$ 解答　$f(x)=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$

$\boxed{3}$ 解答　$f(x)=10x-2$，$a=2$

$\boxed{4}$ 解答　5

$\boxed{5}$ 解答　$\dfrac{37}{12}$

$\boxed{6}$ 解答　(1)　〔図〕，境界線を含む　　(2)　$\dfrac{19}{3}$



$\boxed{7}$ 解答　順に $y=x+\dfrac{13}{4}$，$\dfrac{2}{3}$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$a=1$，$b=9$，$c=-3$　　(2)　$\dfrac{625}{12}$

$\boxed{9}$ 解答　$\dfrac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$

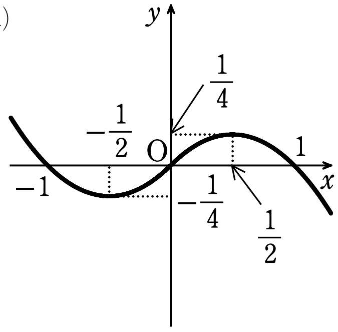
$\boxed{10}$ 解答　$a=3$，$g(x)=x-2$

$\boxed{11}$ 解答　(1)　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$　　(2)　$x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1$　　(3)　$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{3}$

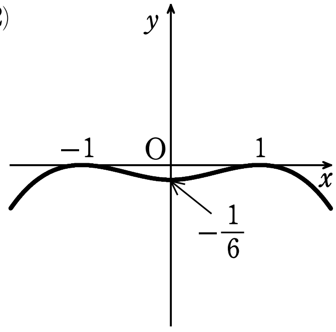
$\boxed{12}$ 解答　$m=\dfrac{4}{9}$

$\boxed{13}$ (2) $x\leqq 0$ のとき $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$，$x\geqq 0$ のとき $F(x)=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$

(1)



(2)



1 (1) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+5)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-x^2+5x\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{4}-1-1+5\right)-\left(\frac{1}{4}+1-1-5\right)$

$=8$

別解 $\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+5)dx=\int_{-1}^{1}(x^3-2x)dx+\int_{-1}^{1}(-3x^2+5)dx$

$=0+2\int_{0}^{1}(-3x^2+5)dx=2\left[-x^3+5x\right]_{0}^{1}=2(-1^3+5\cdot1-0)=8$

(2) (与式)$=\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{2}(x^2-x)dx-\int_{0}^{2}(x^2-x)dx+\int_{-1}^{0}(2x-1)dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{-1}^{0}(2x-1)dx$

$=\int_{-1}^{0}\{(x^2-x)+(2x-1)\}dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2+x-1)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{0}$

$=0-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{7}{6}$

2 右辺を変形して　$f(x)=1+2x\int_{0}^{1}tf(t)\,dt+2\int_{0}^{1}f(t)\,dt$

$\int_{0}^{1}tf(t)\,dt=a$，$\int_{0}^{1}f(t)\,dt=b$ とおくと，a，b は定数であり

$f(x)=2ax+2b+1$

よって　$a=\int_{0}^{1}t(2at+2b+1)dt=\int_{0}^{1}\{2at^2+(2b+1)t\}dt$

$=\left[\frac{2}{3}at^3+\frac{2b+1}{2}t^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{2}{3}a+\frac{2b+1}{2}$

ゆえに　$2a-6b-3=0$ ……①

一方　$b=\int_{0}^{1}(2at+2b+1)dt=\left[at^2+(2b+1)t\right]_{0}^{1}$

$=a+2b+1$

よって　$a+b+1=0$ ……②

①，② を連立して解くと　$a=-\frac{3}{8}$，$b=-\frac{5}{8}$

ゆえに　$f(x)=2\left(-\frac{3}{8}\right)x+2\left(-\frac{5}{8}\right)+1=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

3 等式の両辺を x で微分すると　$f(x)=10x-a$

また，もとの等式の両辺に $x=a$ を代入すると　$0=5a^2-a^2-7a-2$

ゆえに，$4a^2-7a-2=0$ から　$(4a+1)(a-2)=0$　　$a>0$ であるから　$a=2$　答

よって　$f(x)=10x-2$　答

4 $|x^2+3x-4|=|(x+4)(x-1)|$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$|x^2+3x-4|=-(x^2+3x-4)$$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき

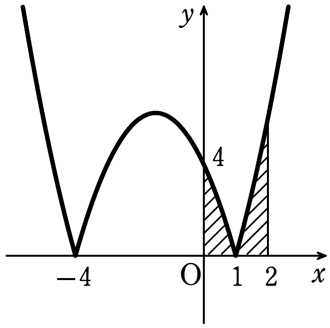
$$|x^2+3x-4|=x^2+3x-4$$

したがって

$$(\text{与式})=\int_0^1\{-(x^2+3x-4)\}dx+\int_1^2(x^2+3x-4)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_1^2$$

$$=5$$



5 方程式 $(x+1)(x-1)(x-2)=0$ を解くと

$$x=-1,\ 1,\ 2$$

グラフは右の図のようになり

$-1\leqq x\leqq 1$ で　$y\geqq 0$

$1\leqq x\leqq 2$ で　$y\leqq 0$

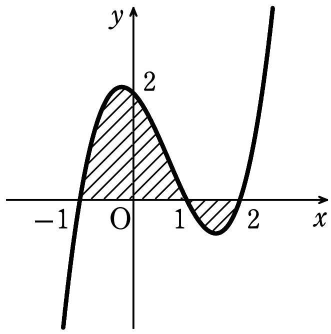
また　　$y=(x+1)(x-1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^1(x^3-2x^2-x+2)dx-\int_1^2(x^3-2x^2-x+2)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=\frac{8}{3}-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{37}{12}$$



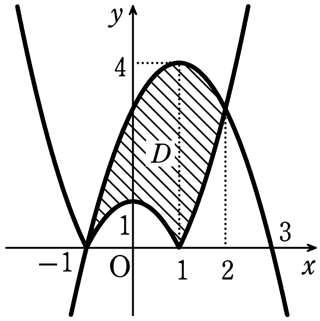
6 (1)　$y=|x^2-1|$ のグラフは，$y=x^2-1$ の $y<0$ の部分を上に折り返したものである。

また　　$y=-x^2+2x+3$

$$=-(x-1)^2+4$$

よって，領域 D は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(2)　2つのグラフ $y=|x^2-1|$，$y=-x^2+2x+3$ の $x>1$ における共有点について，

$x^2-1=-x^2+2x+3$ とすると

$2x^2-2x-4=0$　　　よって　　$(x+1)(x-2)=0$

$x>1$ であるから　$x=2$

ゆえに，領域 D の面積は，図より

$$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+2x+3)-(-x^2+1)\}dx+\int_{1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$

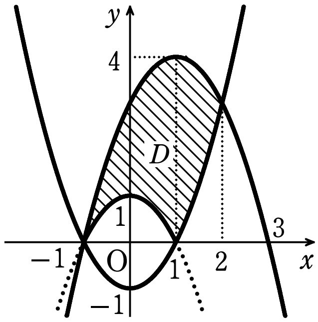
$$=\int_{-1}^{1}(2x+2)dx+\int_{1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$

$$=\Big[x^2+2x\Big]_{-1}^{1}+\Big[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\Big]_{1}^{2}$$

$$=(1+2)-(1-2)+\left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(-\frac{2}{3}+1+4\right)$$

$$=\frac{19}{3}$$

別解　領域 D の面積は，放物線 $y=x^2-1$ と放物線 $y=-x^2+2x+3$ で囲まれた部分の面積から，放物線 $y=x^2-1$ と放物線 $y=1-x^2$ で囲まれた部分の面積を引いたものである。



ゆえに，求める面積は

$$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$

$$-\int_{-1}^{1}\{(1-x^2)-(x^2-1)\}dx$$

$$=-2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx+2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx$$

$$=\frac{2}{6}\{2-(-1)\}^3-\frac{2}{6}\{1-(-1)\}^3=\frac{19}{3}$$

$\boxed{7}$ $y=-x^2+2x+3$ …… ①，$y=-x^2+6x-3$ …… ② とおく．

① において　$y'=-2x+2$

放物線 ① 上の点 $(t,\ -t^2+2t+3)$ における接線の方程式は

$$y=(-2t+2)(x-t)-t^2+2t+3$$

すなわち　$y=(-2t+2)x+t^2+3$ …… ③

② において　$y'=-2x+6$

放物線 ② 上の点 $(p,\ -p^2+6p-3)$ における接線の方程式は

$$y=(-2p+6)(x-p)-p^2+6p-3$$

すなわち　$y=(-2p+6)x+p^2-3$ …… ④

③，④ が一致するとき

$$-2t+2=-2p+6,\ t^2+3=p^2-3$$

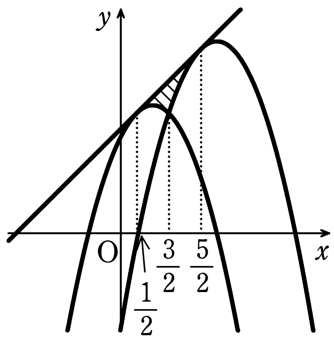
これを解いて　$t=\frac{1}{2}$，$p=\frac{5}{2}$

$t=\dfrac{1}{2}$ を ③ に代入して　$y=x+\dfrac{13}{4}$

これが求める直線の方程式である.

2つの放物線 ①，② の交点の x 座標は $-x^2+2x+3=-x^2+6x-3$ を解いて　$x=\dfrac{3}{2}$

よって，求める面積を S とすると，図から



$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left\{\left(x+\frac{13}{4}\right)-(-x^2+2x+3)\right\}dx$$

$$+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left\{\left(x+\frac{13}{4}\right)-(-x^2+6x-3)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}$$

$\boxed{8}$ (1)　$f(x)=x^3+ax+b$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とする。

$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフがともに点 P(2，19) を通るから

$f(2)=19$　かつ　$g(2)=19$

よって　　$8+2a+b=19$　…… ①

$4a+2b+c=19$　…… ②

また，点 P において共通接線をもつから，P における $y=f(x)$，$y=g(x)$ の接線の傾きが等しい。

すなわち　　$f'(2)=g'(2)$

$f'(x)=3x^2+a$，$g'(x)=2ax+b$ であるから

$12+a=4a+b$　…… ③

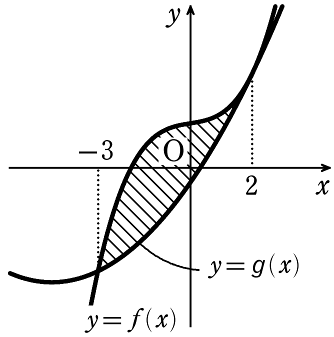
①，③ を解いて　　$a=1$，$b=9$

② に代入して　　$4+18+c=19$　　　よって　　$c=-3$

ゆえに　　$a=1$，$b=9$，$c=-3$

(2)　(1) より　$f(x)=x^3+x+9$,

$g(x)=x^2+9x-3$



2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標について,

$$x^3+x+9=x^2+9x-3$$

とすると

$$x^3-x^2-8x+12=0$$

よって　$(x-2)^2(x+3)=0$

ゆえに，共有点の x 座標は

$$2,\ -3$$

したがって，求める面積は

$$\int_{-3}^{2}\{(x^3+x+9)-(x^2+9x-3)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{2}(x^3-x^2-8x+12)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-4x^2+12x\right]_{-3}^{2}$$

$$=\left(\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}-4\cdot 2^2+12\cdot 2\right)-\left\{\frac{(-3)^4}{4}-\frac{(-3)^3}{3}-4\cdot(-3)^2+12\cdot(-3)\right\}$$

$$=\frac{625}{12}$$

参考　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$ である。

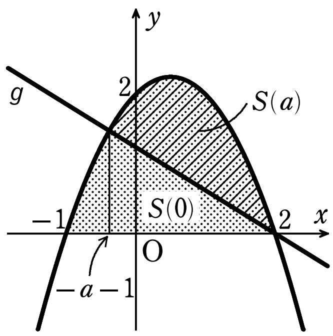
これを利用すると，面積は次のように求められる。

$$\int_{-3}^{2}\{(x^3+x+9)-(x^2+9x-3)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{2}(x+3)(x-2)^2dx=\frac{1}{12}\{2-(-3)\}^4=\frac{625}{12}$$

9　点 $(2,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な直線は条件を満たさない。
よって，直線 g の方程式を　$y=a(x-2)$　とおく。
放物線 $y=2+x-x^2$ と直線 g で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。両者の交点の x 座標は，方程式
$2+x-x^2=a(x-2)$ を解いて　$x=2,\ -a-1$
条件を満たすとき

$$-1<-a-1<2 \quad すなわち \quad -3<a<0 \quad \cdots\cdots ①$$



$$S(a)=\int_{-a-1}^{2}\{(2+x-x^2)-a(x-2)\}dx$$

$$=-\int_{-a-1}^{2}(x+a+1)(x-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}\{2-(-a-1)\}^3=\frac{1}{6}(a+3)^3$$

放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸 $[y=0(x-2)]$ で囲まれた図形の面積は $S(0)$ であり

$S(0)=\dfrac{1}{6}(0+3)^3=\dfrac{9}{2}$

面積を 2 等分するとき，$2S(a)=S(0)$ であるから

$2\cdot\dfrac{1}{6}(a+3)^3=\dfrac{9}{2}$　　よって　　$(a+3)^3=\dfrac{27}{2}$

ゆえに　　$a+3=\sqrt[3]{\dfrac{27}{2}}$　　よって　　$a=\dfrac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$　(これは ① を満たす)

したがって，g の傾きは　　$\dfrac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$

$\boxed{10}$ 等式の両辺を x で微分すると　$g(x)+xg(a)=2x-2$　…… ①

また，等式の両辺に $x=a$ を代入すると　$0=a^2-2a-3$

よって　$(a-3)(a+1)=0$

ゆえに　$a=3$，-1

$a=3$ のとき，① より　$g(x)+xg(3)=2x-2$　…… ②

② に $x=3$ を代入すると　$g(3)+3g(3)=4$

よって　$g(3)=1$

② より　$g(x)=x-2$

$a=-1$ のとき，① より　$g(x)+xg(-1)=2x-2$

これに $x=-1$ を代入すると　$g(-1)-g(-1)=-4$

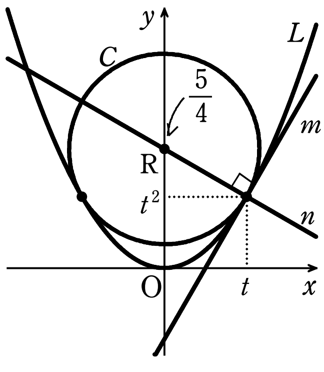
よって，$0=-4$ となり不適。

以上から　$a=3$，$g(x)=x-2$

$\boxed{11}$ (1)　$y=x^2$ から　　$y'=2x$

L と C の接点の x 座標を $t\ (t\neq 0)$ とし，この点での共通の接線を m とすると，m の傾きは　　$2t$

点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ と点 $(t,\ t^2)$ を通る直線を n とすると，



n の傾きは　　$\dfrac{t^2-\dfrac{5}{4}}{t-0}=\dfrac{4t^2-5}{4t}$

直線 m，n は直交するから　　$2t\cdot\dfrac{4t^2-5}{4t}=-1$

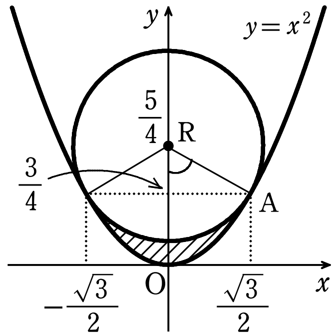
整理すると　　$t^2=\dfrac{3}{4}$　　　よって　　$t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，接点の座標は　　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

(2)　点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ と点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ の距離は　　$\sqrt{\left(0-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}\right)^2}=1$

よって，円 C の方程式は　　$x^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=1$

(3)　右の図のように，接点を A とすると，



$\sin\angle\mathrm{ORA}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より　　$\angle\mathrm{ORA}=\frac{\pi}{3}$

よって，求める面積は

$$2\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2dx\right\}$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=2\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$$

$\boxed{\text{別解}}$　(1)，(2)　円の方程式を $x^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=r^2\ (r>0)$ とする。

これと $y=x^2$ から x^2 を消去すると　　$y+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=r^2$

よって　　$16y^2-24y+25-16r^2=0$　$\cdots\cdots$ ①

円と放物線が異なる 2 点で接する条件は，① が重解をもつことである。

すなわち，① の判別式を D とすると　　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(-12)^2-16(25-16r^2)=256(r^2-1)$$

よって　　$r^2=1$　　　　$r>0$ であるから　　$r=1$

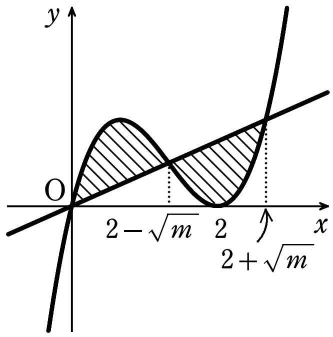
このとき，① の重解は　　$x=\frac{-(-12)}{16}=\frac{3}{4}$

$x^2=\frac{3}{4}$ より　　$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　　接点の座標は　$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$

　　　　　円の方程式は　$x^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=1$

$\boxed{12}$　まず，曲線 $y=x^3-4x^2+4x$ と直線 $y=mx$ の共有点の x 座標を求める。



$x^3-4x^2+4x=mx$ とすると　$x(x^2-4x+4-m)=0$

$0<m<4$ であるから

$x=0,\ 2\pm\sqrt{m}$

$0<m<4$ のとき，囲まれてできる２つの図形は右の図のようになるから，$\alpha=2-\sqrt{m}$，$\beta=2+\sqrt{m}$ とおくと，条件より

$$\int_0^{\alpha}\{(x^3-4x^2+4x)-mx\}dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{mx-(x^3-4x^2+4x)\}dx$$

よって　$\int_0^{\alpha}\{(x^3-4x^2+4x)-mx\}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{(x^3-4x^2+4x)-mx\}dx=0$

ゆえに　$\int_0^{\beta}\{(x^3-4x^2+4x)-mx\}dx=0$

すなわち　$\int_0^{\beta}\{x^3-4x^2+(4-m)x\}dx=0$

よって　$\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{4-m}{2}x^2\right]_0^{\beta}=0$

したがって　$\frac{\beta^4}{4}-\frac{4}{3}\beta^3+\frac{4-m}{2}\beta^2=0$　すなわち　$\frac{\beta^2}{12}\{3\beta^2-16\beta+6(4-m)\}=0$

$\beta\neq 0$ であるから　$3\beta^2-16\beta+6(4-m)=0$

$\beta=2+\sqrt{m}$ を代入して　$3(2+\sqrt{m})^2-16(2+\sqrt{m})+6(4-m)=0$

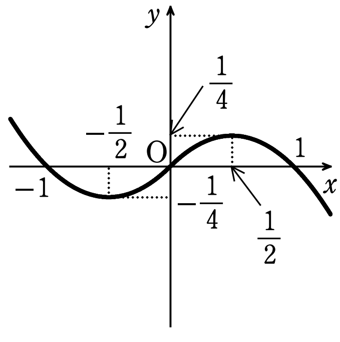
整理すると　$3(\sqrt{m})^2+4\sqrt{m}-4=0$　　よって　$(3\sqrt{m}-2)(\sqrt{m}+2)=0$

$\sqrt{m}+2>0$ であるから　$\sqrt{m}=\frac{2}{3}$　　ゆえに　$m=\frac{4}{9}$　これは $0<m<4$ を満たす。

13 (1)　$x\leqq 0$ のとき　$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$x\geqq 0$ のとき　$f(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

よって，$y=f(x)$ のグラフは，右図のようになる．



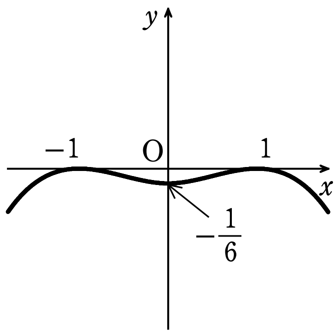
(2)　$x\leqq 0$ のとき　$F(x)=\int_{-1}^{x}t(t+1)dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}$

$x\geqq 0$ のとき　$F(x)=\int_{-1}^{0}t(t+1)dt+\int_0^{x}t(1-t)dt=-\frac{1}{6}+\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]_0^{x}$

$$=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}$$

$F'(x)=f(x)$ から，$F(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	0	$\searrow$



ゆえに，$y=F(x)$ のグラフは右図のようになる．