数学②　第９回試練　数と式・高次方程式　　７／７

BASIC問題

$\boxed{1}$ あるクラス 101 人の中でバナナが好きな人が 43 人，イチゴが好きな人が 39 人，バナナとイチゴ両方が好きな人が 32 人いた。バナナとイチゴがいずれも好きでない人は何人か。

$\boxed{2}$ 命題「$x>2$ ならば，$x^2>4$ である」について，その逆，対偶を下の命題 A，B，C，D から選ぶと，逆は ア$\boxed{\quad}$，対偶は イ$\boxed{\quad}$ である。

A　$x \leqq 2$ ならば，$x^2 \leqq 4$ である。　　B　$x^2 \leqq 4$ ならば，$x \leqq 2$ である。

C　$x^2<4$ ならば，$x<2$ である。　　D　$x^2>4$ ならば，$x>2$ である。

また，命題 A，B，C，D のうち，真であるものは ウ$\boxed{\quad}$ で，他は偽である。

$\boxed{3}$ 2 つの集合 $A=\{2,\ 4,\ 3a^3-2a^2-a-9\}$，$B=\{-4,\ a,\ a^2-2a+5,\ a^2+a+7\}$ の共通部分 $A \cap B$ が $\{2,\ 5\}$ であるとき，a の値を求めよ．ただし，a は実数とする．

$\boxed{4}$ x，y は実数とする．次の $\boxed{\quad}$ にあてはまるものを，下の (a) ～ (d) の中から選べ．

(1)　$x>y$ は，$x^2>y^2$ であるための $\boxed{\quad}$.

(2)　$x^2>y^2$ は，$x^4>y^4$ であるための $\boxed{\quad}$.

(3)　$x+y>2$ は，$x>1$ または $y>1$ であるための $\boxed{\quad}$.

(4)　$x<1$ または $y<1$ は，$x^2+y^2<1$ であるための $\boxed{\quad}$.

(a)　必要条件であるが，十分条件でない
(b)　十分条件であるが，必要条件でない
(c)　必要十分条件である
(d)　必要条件でも十分条件でもない

$\boxed{5}$ 次の命題の否定を作れ。次に，その真偽を判定せよ。

(1)「すべての実数 x，y について $x^2+y^2>0$」

(2)「ある実数 x について $x^2-x+1>0$」

STANDARD問題

6 50人の受験者にA，B，Cの3問よりなる試験を行った結果，Aの正解者は31人，Bの正解者は26人，Cの正解者は25人，A，Bの正解者は16人，A，Cの正解者は12人，B，Cの正解者は15人，A，B，Cの正解者は5人であった。A，B，C3問とも間違えた者は ア$\boxed{}$ 人で，Aのみの正解者は イ$\boxed{}$ 人，A，Bが正解でCを間違えた者は ウ$\boxed{}$ 人である。

7 $a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{8}{a}\right)$ の最小値と，最小値をとるときのabの値を求めよ。

実戦問題

8 a，b，c がすべて1より小さい正の数のとき，3つの不等式

$$a(1-b)>\frac{1}{4},\quad b(1-c)>\frac{1}{4},\quad c(1-a)>\frac{1}{4}$$

が同時には成り立たないことを示せ。

9 $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ のとき，x，y，z のうち少なくとも1つは1に等しいことを示せ。

10 関数 $f(x)=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)x+(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ を考える。
ただし，n は正の整数で，a_1，a_2，……，a_n は実数である。

(1) すべての n に対し，常に $f(x)\geqq 0$ であることを示せ。

(2) $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2\leqq n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ であることを示せ。

(3) $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ であれば，a_1，a_2，……，a_n はすべて等しいことを示せ。

1 解答 51人

2 解答 (ア) D　(イ) B　(ウ) B，C

3 解答 $a=2$

4 解答 (1) (d)　(2) (c)　(3) (b)　(4) (a)

5 解答 (1) ある実数 x，y について $x^2+y^2 \leqq 0$；真

(2) すべての実数 x について $x^2-x+1 \leqq 0$；偽

6 解答 (ア) 6　(イ) 8　(ウ) 11

7 解答 $ab=4$ で最小値 18

8 解答 略

9 解答 略

10 解答 (1) 略　(2) 略　(3) 略

$\boxed{1}$ クラス全員の集合を全体集合 U とし，バナナが好きな人の集合を A，イチゴが好きな人の集合を B とすると

$$n(U)=101,\ n(A)=43,\ n(B)=39,\ n(A\cap B)=32$$

バナナとイチゴがいずれも好きでない人の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$，すなわち $\overline{A\cup B}$ で表され，その要素の個数は　$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

ここで　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=43+39-32=50$

よって　$n(\overline{A\cup B})=101-50=51$（人）

$\boxed{2}$ 逆は「$x^2>4$ ならば $x>2$ である」　よって　D

対偶は「$x^2\leqq 4$ ならば $x\leqq 2$ である」　よって　B

命題 A は偽　反例：$x=-3$

命題 B は真　(証明)　$x^2\leqq 4$ ならば $-2\leqq x\leqq 2$　よって　$x\leqq 2$

命題 C は真　(証明)　$x^2<4$ ならば $-2<x<2$　よって　$x<2$

命題 D は偽　反例：$x=-3$

したがって，真である命題は　B，C

$\boxed{3}$
$\mathrm{A}=\{2,\ 4,\ 3a^3-2a^2-a-9\}$ ……①

$\mathrm{B}=\{-4,\ a,\ a^2-2a+5,\ a^2+a+7\}$ ……②

$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{2,\ 5\}$ ……③

①，③ から　$3a^3-2a^2-a-9=5$

よって　$(a-2)(3a^2+4a+7)=0$

$3a^2+4a+7=0$ を満たす実数 a はないから　$a=2$

このとき，$\mathrm{A}=\{2,\ 4,\ 5\}$，$\mathrm{B}=\{-4,\ 2,\ 5,\ 13\}$ となり，題意を満たす．

ゆえに　$a=2$

別解　② において　$a^2-2a+5=(a-1)^2+4\geqq 4$，$a^2+a+7=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}\geqq\dfrac{27}{4}>6$

よって，②，③ から　$a=2$

このとき，$\mathrm{A}=\{2,\ 4,\ 5\}$，$\mathrm{B}=\{-4,\ 2,\ 5,\ 13\}$ となり題意を満たす．

ゆえに　$a=2$

$\boxed{4}$ (1)　A$=\{(x,\ y)\mid x>y\}$，B$=\{(x,\ y)\mid x^2>y^2\}$

とおく．

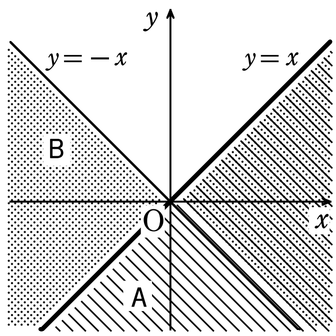
B$=\{(x,\ y)\mid (x+y)(x-y)>0\}$ であるから，A，B の領域を図示すると，右図のようになる．

ただし，境界線を含まない．

よって，A⊂B も A⊃B も成り立たない．

したがって，必要条件でも十分条件でもない．

ゆえに　(d)



(2)　$x^4>y^4$ が成立するときは x，y がともに 0 になることはない．

ゆえに　$x^4>y^4 \Longleftrightarrow (x^2+y^2)(x^2-y^2)>0 \Longleftrightarrow x^2-y^2>0$

よって，必要十分条件である．ゆえに　(c)

(3)　C$=\{(x,\ y)\mid x+y>2\}$，

D$=\{(x,\ y)\mid x>1$ または $y>1\}$ とおく．

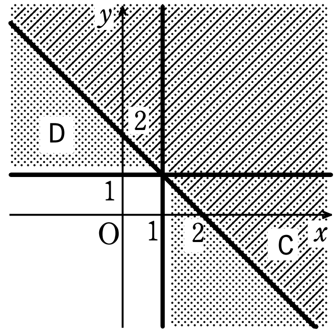
C，D の領域を図示すると右図のようになる．

ただし，境界線を含まない．

よって，C⊂D は成り立つが，C⊃D は成り立たない．

したがって，十分条件であるが，必要条件でない．

ゆえに　(b)



(4)　E$=\{(x,\ y)\mid x<1$ または $y<1\}$，

F$=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2<1\}$ とおく．

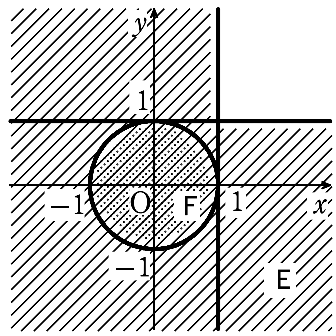
E，F の領域を図示すると，右図のようになる．

ただし，境界線を含まない．

よって，E⊂F は成り立たないが，E⊃F は成り立つ．

したがって，必要条件であるが，十分条件でない．

ゆえに　(a)



$\boxed{5}$ (1)　ある実数 x，y について　$x^2+y^2\leqq 0$

$x=0$，$y=0$ のとき，$x^2+y^2\leqq 0$ となるから，これは真である。

(2)　すべての実数 x について　$x^2-x+1\leqq 0$

$x=0$ のとき，$x^2-x+1=1>0$ となるから，これは偽である。

$\boxed{6}$ 50 人の受験者の集合を全体集合 U とし，そのうち A，B，C の正解者の集合を，それぞれ A，B，C で表すと，条件から

$n(A)=31$，$n(B)=26$，$n(C)=25$，$n(A\cap B)=16$，$n(A\cap C)=12$，

$n(B\cap C)=15$，$n(A\cap B\cap C)=5$

ここで　$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

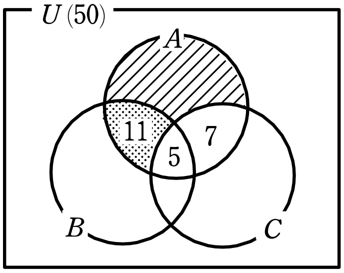
$+n(A\cap B\cap C)$

$=31+26+25-16-15-12+5=44$

A，B，C 3 問とも間違えた者の集合は，$\overline{A\cup B\cup C}$ であるから，その人数は

$n(\overline{A\cup B\cup C})=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

$=50-44={}^{ア}6$ (人)



また，A のみの正解者の集合は，右の図の斜線部分であるから，その人数は

$31-(11+5+7)={}^{イ}8$ (人)

A，B が正解で C を間違えた者の集合は，右の図の網点部分であるから，その人数は

${}^{ウ}11$ 人

$\boxed{7}$ $(与式)=ab+8+2+\dfrac{16}{ab}=ab+\dfrac{16}{ab}+10$

ここで，$a>0$，$b>0$ であるから　$ab>0$，$\dfrac{16}{ab}>0$

相加平均と相乗平均の関係により　$ab+\dfrac{16}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\dfrac{16}{ab}}=2\cdot 4=8$

ゆえに　$(与式)=ab+\dfrac{16}{ab}+10\geqq 8+10=18$

等号が成り立つのは　$ab=\dfrac{16}{ab}$　　$ab>0$ であるから　$ab=4$

よって，$ab=4$ で最小値 18 をとる。

$\boxed{8}$ $a(1-b)>\dfrac{1}{4}$，$b(1-c)>\dfrac{1}{4}$，$c(1-a)>\dfrac{1}{4}$ が同時に成り立つと仮定する。

辺々を掛けると　$abc(1-a)(1-b)(1-c)>\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$　…… ①

一方，$a(1-a)=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ $(0<a<1)$ より　$0<a(1-a)\leqq\dfrac{1}{4}$　…… ②

同様に　$0<b(1-b)\leqq\dfrac{1}{4}$　…… ③，　$0<c(1-c)\leqq\dfrac{1}{4}$　…… ④

②，③，④ の辺々を掛けると　$0<abc(1-a)(1-b)(1-c)\leqq\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

これは，① と矛盾する。したがって，同時には成り立たない。

9　x，y，z のうち少なくとも 1 つが 1 であるための条件は，$(x-1)(y-1)(z-1)=0$ が成り立つことである。

条件から　$x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$　…… ①

① において，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}$ であるから　$\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=1$

よって　$xy+yz+zx=xyz$　…… ②

また，① から　$x+y+z=1$　…… ③

ゆえに，②，③ より

$$(x-1)(y-1)(z-1)$$
$$=xyz-(xy+yz+zx)+x+y+z-1=xyz-xyz+1-1=0$$

よって，x，y，z のうち少なくとも 1 つは 1 に等しい。

10　(1)　$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots\cdots+(x-a_n)^2\geqq 0$

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$f(x)$ の x^2 の係数 n は正であり，常に $f(x)\geqq 0$ であることから，$D\leqq 0$ である。

ここで　$\dfrac{D}{4}=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2-n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$　…… ①

よって，$D\leqq 0$ から　$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2\leqq n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$

(3)　条件と ① より，$D=0$ であるから，方程式 $f(x)=0$ はただ 1 つの実数解をもつ。

それを $x=x_0$ とすると　$f(x_0)=0$

すなわち　$(x_0-a_1)^2+(x_0-a_2)^2+\cdots\cdots+(x_0-a_n)^2=0$

よって　$x_0-a_1=x_0-a_2=\cdots\cdots=x_0-a_n=0$

したがって　$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$

参考　一般に，実数 a_1，……，a_n，b_1，……，b_n に対して

$$(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots\cdots\cdots+b_n{}^2)\geqq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)^2$$

が成り立つ。(シュワルツの不等式)

本問は，この不等式の $b_1=b_2=\cdots\cdots=b_n=1$ の場合である。