BASIC問題

1 (1) $\dfrac{2i}{3+i}-\dfrac{2-i}{1-3i}$ を計算せよ。

(2) 等式 $(1+3i)(a-bi)=-2i$ を満たす実数 a，b の値を求めよ。

2 方程式 $2x^3-9x^2+6x-1=0$ の解を $x_1, x_2, x_3\ (x_1<x_2<x_3)$ とするとき， x_1, x_2, x_3 を求めよ。

3 方程式 $x^3=1$ の虚数解の１つを ω とするとき，$(1+\omega^2)^3(2+\omega)+(1+\omega)^3(2+\omega^2)$ の値を求めよ。

4 多項式 $P(x)$ を $x-1$，$x-2$ で割った余りがそれぞれ 5，7 である。$P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割った余りを求めよ。

STANDARD問題

5 $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ を簡単にせよ。

6 方程式 $x^3-2x^2+ax+b=0$ が $2+i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。

7 複素数 x が $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$ を満たすとする。もとの方程式の解を複素数の範囲ですべて求めよ。

8 整式 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ を $x(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ.

9 整式 $f(x)$ を $x+5$ で割ると余りが -11，$(x+2)^2$ で割ると余りが $x+3$ となる。このとき，$f(x)$ を $(x+5)(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

実戦問題

10 x の２次方程式 $x^2-(k-2)x+2k=0$ の解が次のようであるとき，定数 k の値を求めよ。

(1) ２つの解の差が１

(2) ２つの実数解の絶対値の和が $2\sqrt{2}$

11 $x^2-x+1=0$ の１つの解を ω とするとき，$\omega^{12}+6\omega^{10}+15\omega^8+20\omega^6+15\omega^4+6\omega^2+1$ の値を求めよ.

12 x についての多項式 $P(x)$ を x^2+x+1 で割った余りが $x+1$，x^2-x+1 で割った余りが $x-1$ のとき，$P(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ で割った余りを求めよ。

13 $f(x)=x^2-\dfrac{4}{5}$ とおく。

(1) ２次方程式 $f(x)=x$ の２つの解を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とするとき，$f(f(\alpha))$，$f(f(\beta))$ の値を求めよ。

(2) 方程式 $f(f(x))=x$ を解け。

14 $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ のとき，x^4-10x^2，$x^{10}-10x^8+x^6+x^4+2x^2$ の値を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　(1)　$\dfrac{i-3}{10}$　　(2)　$a=-\dfrac{3}{5}$, $b=\dfrac{1}{5}$

$\boxed{2}$ 解答　(ア)　$2-\sqrt{3}$　　(イ)　$\dfrac{1}{2}$　　(ウ)　$2+\sqrt{3}$

$\boxed{3}$ 解答　-3

$\boxed{4}$ 解答　$2x+3$

$\boxed{5}$ 解答　$a+b+c$

$\boxed{6}$ 解答　$a=-3$, $b=10$, $x=-2$, $2-i$

$\boxed{7}$ 解答　(前半)　$t^2-2t-3=0$　　(後半)　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$\boxed{8}$ 解答　$96x+24$

$\boxed{9}$ 解答　$-x^2-3x-1$

$\boxed{10}$ 解答　(1)　$k=6\pm\sqrt{33}$　　(2)　$k=6-2\sqrt{10}$

$\boxed{11}$ 解答　1

$\boxed{12}$ 解答　x^3+x

$\boxed{13}$ 解答　(1)　順に $\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$, $\dfrac{5+\sqrt{105}}{10}$　　(2)　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10}$, $\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

$\boxed{14}$ 解答　$x^4-10x^2=-1$, $x^{10}-10x^8+x^6+x^4+2x^2=59-24\sqrt{6}$

$\boxed{1}$ (1)　(与式)$=\dfrac{2i(3-i)}{(3+i)(3-i)}-\dfrac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{6i-2i^2}{9-i^2}-\dfrac{2+6i-i-3i^2}{1-9i^2}$

$=\dfrac{6i+2}{10}-\dfrac{5+5i}{10}=\dfrac{i-3}{10}$

(2)　左辺を展開すると　　$a-bi+3ai-3bi^2=-2i$

よって　　$(a+3b)+(3a-b)i=-2i$

a，b は実数より，$a+3b$，$3a-b$ も実数であるから　　$a+3b=0$，$3a-b=-2$

これを解くと　　$a=-\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{1}{5}$

別解　等式より　　$a-bi=\dfrac{-2i}{1+3i}$

(右辺)$=\dfrac{-2i(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{-2i(1-3i)}{1-9i^2}=\dfrac{-i+3i^2}{5}=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i$

よって　　$a-bi=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i$

a，b は実数であるから　　$a=-\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{1}{5}$

$\boxed{2}$ $P(x)=2x^3-9x^2+6x-1$ とおくと　　$P\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

よって，$P(x)\div(2x-1)$ を計算することにより　　$P(x)=(2x-1)(x^2-4x+1)$

ゆえに　$(2x-1)(x^2-4x+1)=0$　　よって　$x=\dfrac{1}{2}, 2\pm\sqrt{3}$

$x_1<x_2<x_3$ から　　$x_1=$ ${}^{ア}2-\sqrt{3}$, $x_2=$ ${}^{イ}\dfrac{1}{2}$, $x_3=$ ${}^{ウ}2+\sqrt{3}$

$\boxed{3}$ 方程式 $x^3=1$ から　　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω は $x^2+x+1=0$ の解である。

よって，ω は $\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ を満たす。

これより　　$1+\omega=-\omega^2$，$1+\omega^2=-\omega$

よって　　$(1+\omega^2)^3(2+\omega)+(1+\omega)^3(2+\omega^2)=(-\omega)^3(2+\omega)+(-\omega^2)^3\{1+(1+\omega^2)\}$

$=-\omega^3(2+\omega)-\omega^6(1-\omega)$

$=-1\cdot(2+\omega)-1^2\cdot(1-\omega)$

$=-2-\omega-1+\omega=-3$

$\boxed{4}$ $P(x)$ を 2 次式 $(x-1)(x-2)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$$

この等式より　　$P(1)=a+b$，$P(2)=2a+b$

$P(x)$ を $x-1$ で割った余りが 5 であるから　　$P(1)=5$

$x-2$ で割った余りが 7 であるから　　$P(2)=7$

よって　　$a+b=5$，$2a+b=7$　　　これを解くと　　$a=2$，$b=3$

したがって，求める余りは　　$2x+3$

$\boxed{5}$ $(与式)=\dfrac{-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$(分子)=-a^3(b-c)+a(b^3-c^3)-bc(b^2-c^2)=-(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$=-(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}=-(b-c)(c-a)\{b^2+bc-a(c+a)\}$

$=-(b-c)(c-a)\{-c(a-b)-(a^2-b^2)\}=-(b-c)(c-a)(a-b)\{-c-(a+b)\}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

よって　$(与式)=a+b+c$

$\boxed{6}$ $x=2+i$ が方程式の解であるから　$(2+i)^3-2(2+i)^2+a(2+i)+b=0$

整理すると　$(2a+b-4)+(a+3)i=0$

$2a+b-4$，$a+3$ は実数であるから　$2a+b-4=0$，$a+3=0$

これを解いて　$a=-3$，$b=10$

よって，方程式は　$x^3-2x^2-3x+10=0$

左辺を因数分解すると　$(x+2)(x^2-4x+5)=0$

よって，方程式の解は　$x=-2$，$2\pm i$

したがって，他の解は　$x=-2$，$2-i$

$x=3$ が方程式の解であるから　$3^3+a\cdot 3^2+11\cdot 3-6=0$

すなわち　$9a+54=0$　　よって　$a=-6$

このとき，方程式は　$x^3-6x^2+11x-6=0$

左辺は $x-3$ を因数にもつから，$x-3$ で割ると，商は x^2-3x+2 となり

$(x-3)(x^2-3x+2)=0$

$(x-3)(x-1)(x-2)=0$

よって，方程式の解は　$x=1$，2，3

したがって，残りの解は　$x=1$，2

$\boxed{7}$ $x=0$ は方程式の解でないから　$x\neq 0$

方程式の両辺を $x^2\,(\neq 0)$ で割ると　$x^2-2x-1-2\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

よって　$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$ であるから　$(t^2-2)-2t-1=0$

ゆえに　$t^2-2t-3=0$　　すなわち　$(t+1)(t-3)=0$

よって　$t=-1$，3

[1]　$t=-1$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=-1$

両辺に x を掛けて整理すると　$x^2+x+1=0$

これを解くと　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

[2]　$t=3$ のとき　$x+\frac{1}{x}=3$

両辺に x を掛けて整理すると　$x^2-3x+1=0$

これを解くと　$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

したがって，解は　$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\boxed{8}$ 求める余りは 1 次以下の整式または 0 であるから，$ax+b$ とおく.
商を $Q(x)$ とすると　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=x(x-1)Q(x)+ax+b$ が成り立つ.
$x=0$ とおくと　$1\cdot2\cdot3\cdot4=b$　ゆえに　$b=24$
$x=1$ とおくと　$2\cdot3\cdot4\cdot5=a+b$　ゆえに　$a+24=120$　よって　$a=96$
したがって，求める余りは　$96x+24$

別解　
$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)&=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)\\&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)\\&=x^4+10x^3+35x^2+50x+24\end{aligned}$$

また　$x(x-1)=x^2-x$

$$\begin{array}{r@{}l}
 & x^2+11x+46 \\
x^2-x\,\big) & x^4+10x^3+35x^2+50x+24 \\
 & x^4-x^3 \\ \hline
 & 11x^3+35x^2 \\
 & 11x^3-11x^2 \\ \hline
 & 46x^2+50x \\
 & 46x^2-46x \\ \hline
 & 96x+24
\end{array}$$

よって，余りは　$96x+24$

$\boxed{9}$ $f(x)$ を 3 次式 $(x+5)(x+2)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると，次の等式が成り立つ。

$$f(x)=(x+5)(x+2)^2Q(x)+ax^2+bx+c\quad(a,\ b,\ c\ \text{は定数})$$

さらに，条件より，$f(x)$ を $(x+2)^2$ で割ったときの余りが $x+3$ であるから，
ax^2+bx+c を $(x+2)^2$ で割ったときの余りが $x+3$ となる。
すなわち　$ax^2+bx+c=a(x+2)^2+x+3$
よって　$f(x)=(x+5)(x+2)^2Q(x)+a(x+2)^2+x+3$
剰余の定理により，$f(-5)=-11$ から　$a(-5+2)^2+(-5)+3=-11$
これを解くと　$a=-1$
よって，余りは　$-(x+2)^2+x+3=-x^2-3x-1$

10　2次方程式 $x^2-(k-2)x+2k=0$ の2つの解を α，β とすると，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=k-2$ ……①，　$\alpha\beta=2k$ ……②

(1)　2つの解の差が1であるのは，$\alpha-\beta=\pm1$ すなわち $(\alpha-\beta)^2=1$ のときである。

$(\alpha-\beta)^2=1$ から　$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1$

①，② を代入すると　$(k-2)^2-4\cdot2k=1$

すなわち　$k^2-12k+3=0$　　これを解いて　$k=6\pm\sqrt{33}$

(2)　この2次方程式の判別式を D とすると　$D=(k-2)^2-8k=k^2-12k+4$

実数解をもつための条件は，$D\geqq0$ から　$k\leqq6-4\sqrt{2}$，$6+4\sqrt{2}\leqq k$　……③

実数解をもつとき，2つの実数解の絶対値の和が $2\sqrt{2}$ になることは $|\alpha|+|\beta|=2\sqrt{2}$ が成り立つことである。

$$|\alpha|+|\beta|=2\sqrt{2} \iff (|\alpha|+|\beta|)^2=(2\sqrt{2})^2$$
$$\iff \alpha^2+\beta^2+2|\alpha||\beta|=8$$
$$\iff (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=8$$

①，② を代入すると　$(k-2)^2-2\cdot2k+2|2k|=8$

すなわち　$k^2-8k+4|k|-4=0$　……④

[1]　$k\geqq0$ のとき

④ は　$k^2-4k-4=0$　　これを解いて　$k=2\pm2\sqrt{2}$

$k\geqq0$ を満たすものは　$k=2+2\sqrt{2}$　　これは ③ を満たさない。

[2]　$k<0$ のとき

④ は　$k^2-12k-4=0$　　これを解いて　$k=6\pm2\sqrt{10}$

$k<0$ を満たすものは　$k=6-2\sqrt{10}$

$6-2\sqrt{10}<6-4\sqrt{2}$ であるから，これは ③ を満たす。

以上から　$k=6-2\sqrt{10}$

11　$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ から　$\omega^3=-1$

また　$\omega^2-\omega+1=0$ から　$\omega^2-\omega=-1$

$\omega^{12}+6\omega^{10}+15\omega^8+20\omega^6+15\omega^4+6\omega^2+1$

$=(\omega^3)^4+20(\omega^3)^2+1+6\{(\omega^3)^3\omega+\omega^2\}+15\{(\omega^3)^2\omega^2+(\omega^3)\omega\}$
$=1+20+1+6(-\omega+\omega^2)+15(\omega^2-\omega)$
$=22+6\cdot(-1)+15\cdot(-1)=1$　答

参考　平凡に

$(\omega^3)^4+6(\omega^3)^3\omega+15(\omega^3)^2\omega^2+20(\omega^3)^2+15\omega^3\omega+6\omega^2+1$

$=1-6\omega+15\omega^2+20-15\omega+6\omega^2+1$
$=21\omega^2-21\omega+22=21\cdot(-1)+22=1$

としてもよい.

12　$P(x)$ を4次式 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)Q(x)+R(x)$$ （$R(x)$ は0または3次以下の整式）

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)Q(x)$ は x^2+x+1 で割り切れるから，$P(x)$ を x^2+x+1 で割った余りは，$R(x)$ を x^2+x+1 で割った余りと等しい。

よって，$R(x)$ は次のように表される。

$$R(x)=(x^2+x+1)(ax+b)+x+1 \quad (a,\ b \text{ は定数}) \quad \cdots\cdots ①$$

また，$P(x)$ を x^2-x+1 で割った余りは，$R(x)$ を x^2-x+1 で割った余りと等しいから

$$R(x)=(x^2-x+1)(cx+d)+x-1 \quad (c,\ d \text{ は定数}) \quad \cdots\cdots ②$$

①，② は同じ式を表すから

$$(x^2+x+1)(ax+b)+x+1=(x^2-x+1)(cx+d)+x-1$$

式を展開して整理すると

$$ax^3+(a+b)x^2+(a+b+1)x+b+1=cx^3+(d-c)x^2+(c-d+1)x+d-1$$

両辺の係数を比較して

$$a=c,\ a+b=d-c,\ a+b+1=c-d+1,\ b+1=d-1$$

これを解くと　　$a=1,\ b=-1,\ c=1,\ d=1$

したがって，求める余り $R(x)$ は　　$R(x)=(x^2+x+1)(x-1)+x+1=x^3+x$

13 (1)　$x^2-\dfrac{4}{5}=x$ から　　$5x^2-5x-4=0$

$\alpha<\beta$ であるから　　$\alpha=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$，$\beta=\dfrac{5+\sqrt{105}}{10}$

また，α，β は方程式 $f(x)=x$ の解であるから　　$f(\alpha)=\alpha$，$f(\beta)=\beta$

よって　　$f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$，$f(f(\beta))=f(\beta)=\beta=\dfrac{5+\sqrt{105}}{10}$

(2)　$f(f(x))=f\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)=\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)^2-\dfrac{4}{5}=x^4-\dfrac{8}{5}x^2-\dfrac{4}{25}$

よって，$f(f(x))=x$ から　　$x^4-\dfrac{8}{5}x^2-\dfrac{4}{25}=x$

すなわち　　$25x^4-40x^2-25x-4=0$　$\cdots\cdots$ ①

ここで，$f(f(\alpha))=\alpha$，$f(f(\beta))=\beta$ であるから，α，β は ① の2つの解である。

ゆえに，(1) より，① の左辺は $5(x-\alpha)(x-\beta)=5x^2-5x-4$ を因数にもつ。

① の左辺を因数分解すると　　$(5x^2-5x-4)(5x^2+5x+1)=0$

したがって，$f(f(x))=x$ の解は　　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10}$，$\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

別解　$f(x)-x=A$ とおくと

$$\begin{aligned}f(f(x))-x&=f(x+A)-x=(x+A)^2-\frac{4}{5}-x=A^2+2xA+x^2-\frac{4}{5}-x\\&=A^2+2xA+A=A(A+2x+1)\\&=\left(x^2-\frac{4}{5}-x\right)\left\{\left(x^2-\frac{4}{5}-x\right)+2x+1\right\}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{25}(5x^2-5x-4)(5x^2+5x+1)$$

よって，$f(f(x))=x$ から　$(5x^2-5x-4)(5x^2+5x+1)=0$

したがって　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10}$，$\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

参考　$5x^2+5x+1=0$ の 2 つの解 $a=\dfrac{-5-\sqrt{5}}{10}$，$b=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{10}$ は，

$f(a)=b$，$f(b)=a$，$a\neq b$ を満たす実数である。

14 $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ から　$x^2=5-2\sqrt{6}$　…… ①

すなわち　$x^2-5=-2\sqrt{6}$　　この両辺を 2 乗すると　$(x^2-5)^2=24$

よって　$x^4-10x^2=-1$　　また　$x^4-10x^2+1=0$　…… ②

ここで，多項式 $x^{10}-10x^8+x^6+x^4+2x^2$ を多項式 x^4-10x^2+1 で割ると

$$\begin{array}{r|l}
 & x^6 \qquad\qquad +1 \\
\hline
x^4-10x^2+1 & x^{10}-10x^8+x^6+x^4+2x^2 \\
 & x^{10}-10x^8+x^6 \\
\hline
 & \qquad\qquad x^4+2x^2 \\
 & \qquad\qquad x^4-10x^2+1 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 12x^2-1
\end{array}$$

これと ①，② から，求める式の値は

$$\begin{aligned}x^{10}-10x^8+x^6+x^4+2x^2&=(x^4-10x^2+1)(x^6+1)+12x^2-1\\&=12x^2-1=12(5-2\sqrt{6})-1=59-24\sqrt{6}\end{aligned}$$