STANDARD問題

1 数列 1，2，3，……，n において，異なる 2 つの項の積の和 を求めよ。($n \geqq 2$)

2 年始めに 10 万円ずつ毎年積み立てることにした．年利率 8 % の複利計算の場合，元利合計が 240 万円を初めて超えるのは何年後か．$\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ として計算せよ．

3 分母と分子の和が 2，3，4，…… となるような分数を並べた次の数列において，$\frac{7}{15}$ は第何項か。また，第 99 項を求めよ。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \cdots\cdots$$

4 放物線 $y=-x^2+8x$ と直線 $y=x$ で囲まれる領域内 (境界を含む) にある格子点の個数を求めよ。

5 $a_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$ とする。

(1)　$n=1$，2，3，4 に対して，a_n を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

6 袋の中に 1 から 7 までの数字が 1 つずつ書いてある 7 個の球がある。この袋から 1 個の球を無作為に取り出し，その数を記録してもとの袋に戻す。これを n 回繰り返したとき，記録した n 個の数の和が偶数である確率を p_n とする。ただし，$n=1$ のとき，p_1 は取り出した 1 個の球に書かれている数が偶数である確率とみなす。

(1)　p_{n+1} を p_n で表せ。　　(2)　p_n を求めよ。

実戦問題

7 数列 1，2，3，……，n において，互いに隣り合わない 2 つの項の積の和を求めよ。($n \geqq 3$)

8 次のような分数の列がある。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots$$

(1)　$\frac{5}{9}$ は第何項か。　　(2)　第 800 項を求めよ。

9 自然数を右の図のように並べる。

(1)　n が偶数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(2)　n が奇数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(3)　1000 は左から何番目，上から何段目にあるか。

1	3	4	10	11	…
2	5	9	12	…	…
6	8	13	…	…	…
7	14	…	…	…	…
15	17	…	…	…	…
16	…	…	…	…	…

10 (1)　$3x+2y\leqq 8$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$3x+2y\leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

11 3 文字 a，b，c を横に n 個書き並べたものを長さ n の単語と呼ぶことにする。ただし，$n=1$，2，3，…… とする。例えば，$abba$，$baca$，$caab$ はどれも長さ 4 の異なる単語である。

(1)　長さ 1，2 および 3 の単語を，それぞれ列挙せよ。

(2)　長さ n の単語のうち，a を奇数個含むものの数を x_n で，残りのものの数を y_n で表す。このとき，x_n，y_n を求めよ。

実戦問題（記述式）

12 x の関数 $f_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次の式で定める.

$$\begin{cases} f_0(x)=1,\ f_1(x)=x \\ f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\ (n\geqq 2) \end{cases}$$

このとき，$f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ と表されることを示せ．ただし，$\sin\theta\fallingdotseq 0$ とする．

13 整数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次の式によって定義する.

$$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}\quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1)　数学的帰納法を用いて $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ であることを示せ.

(2)　a_n，b_n を順次計算して，$a_n+b_n\sqrt{2}>1000$ となる最小の n を求めよ.

(3)　$b_n\sqrt{2}$ の小数部分が 0.001 以下となる最小の n とそのときの b_n の値を求めよ.

14 $a_1=1$，$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_na_{n+1}=2(a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots\cdots+a_na_1)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を推測し，その推測が正しいことを証明せよ。

1 解答 $\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

2 解答 14 年後

3 解答 第 217 項，$\frac{8}{7}$

4 解答 64 個

5 解答 (1) $a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{5}{6}$，$a_3=\frac{23}{24}$，$a_4=\frac{119}{120}$

(2) $a_n=1-\frac{1}{(n+1)!}$，証明略

6 解答 (1) $p_{n+1}=-\frac{1}{7}p_n+\frac{4}{7}$　(2) $p_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\right)^n+\frac{1}{2}$

7 解答 $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)$

8 解答 (1) 第 39 項　(2) $\frac{39}{40}$

9 解答 (1) $\frac{1}{2}n(n+1)$　(2) $\frac{1}{2}(n^2-n+2)$　(3) 左から 36 番目，上から 10 段目

10 解答 (1) 10 個　(2) 337010 個

11 解答 (1) 長さ 1 の単語：a，b，c

長さ 2 の単語：aa，bb，cc，ab，ba，bc，cb，ca，ac

長さ 3 の単語：aaa，bbb，ccc，aab，aba，baa，aac，aca，caa，bba，bab，abb，bbc，bcb，cbb，cca，cac，acc，ccb，cbc，bcc，abc，acb，bac，bca，cab，cba

(2) $x_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$，$y_n=\frac{1}{2}(3^n+1)$

12 解答 略

13 解答 (1) 略　(2) $n=8$　(3) $n=9$，$b_9=985$

14 解答 $a_n=n$，証明略

$\boxed{1}$　求める和を S とする。

$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+2(1\cdot2+1\cdot3+\cdots\cdots+2\cdot3+\cdots\cdots)$

であるから　$\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+2S$

よって　$\displaystyle 2S=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\displaystyle =\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-2)$

$\displaystyle =\frac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

したがって　$\displaystyle S=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

$\boxed{2}$ n 年後の元利合計は，初項 10×1.08 (万円)，公比 1.08 の等比数列の和である．

よって，求める条件は　$\displaystyle\frac{10\times1.08(1.08^n-1)}{1.08-1}>240$

ゆえに　$135(1.08^n-1)>240$

よって　$\displaystyle 1.08^n>\frac{25}{9}$

したがって　$n\log_{10}1.08>2\log_{10}5-2\log_{10}3$ ……①

ここで，$\displaystyle\log_{10}1.08=\log_{10}\frac{108}{100}=3\log_{10}3+2\log_{10}2-2=0.033$,

$2\log_{10}5-2\log_{10}3=2(1-\log_{10}2-\log_{10}3)=0.444$

ゆえに，① は　$0.033n>0.444$　　ゆえに　$n>13.4$ ……

これを満たす n の最小値は　$n=14$　　よって　14 年後.

3 分母と分子の和が同じ分数を1つの群として，次のように区切って考える。

$$\frac{1}{1} \Bigm| \frac{1}{2},\ \frac{2}{1} \Bigm| \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1} \Bigm| \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1} \Bigm| \cdots$$

第 n 群には n 個の分数が入る。

(前半)　第 n 群に入る分数の分母と分子の和は $n+1$ であるから，$\dfrac{7}{15}$ は第21群にあり，

その7番目の数である。

第1群から第20群までの項の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+20=\frac{1}{2}\cdot 20(20+1)=210$$

$210+7=217$ であるから，$\dfrac{7}{15}$ は　　第217項

(後半)　第1群から第 n 群までの項の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって，第99項が第 n 群に入るとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<99\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

ゆえに　　$(n-1)n<198\leqq n(n+1)$　……①

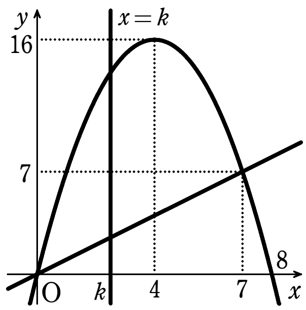
$13\cdot 14=182$，$14\cdot 15=210$ であるから，① を満たす自然数 n は　　$n=14$

第1群から第13群までの項の個数は　　$\dfrac{1}{2}\cdot 13\cdot 14=91$

よって，第99項は第14群の8番目であるから　　$\dfrac{8}{14-8+1}=\dfrac{8}{7}$

4 $-x^2+8x=x$ とすると　　$x(x-7)=0$

よって，放物線 $y=-x^2+8x$ と直線 $y=x$ は2点 $(0,\ 0)$，$(7,\ 7)$ で交わる。



領域内の格子点で，直線 $x=k$ (k は整数) 上にあるものの座標を $(k,\ y)$ とおくと

$$k\leqq y\leqq -k^2+8k$$

よって，格子点の個数は

$$-k^2+8k-k+1=-k^2+7k+1$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 7$ であるから，求める格子点の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{7}(-k^2+7k+1)&=-\sum_{k=0}^{7}k^2+7\sum_{k=0}^{7}k+\sum_{k=0}^{7}1\\&=-\sum_{k=1}^{7}k^2+7\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=0}^{7}1\\&=-\frac{1}{6}\cdot 7\cdot 8\cdot 15+7\cdot\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8+8\\&=64\ (\text{個})\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ (1)　$a_1=\dfrac{1}{2!}=\dfrac{1}{2}$

ここで　　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}+\dfrac{n+1}{(n+2)!}$

よって　　$a_{n+1}=a_n+\dfrac{n+1}{(n+2)!}$　……①

ゆえに　　$a_2=a_1+\dfrac{2}{3!}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{6}=\dfrac{5}{6}$,

$a_3=\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{4!}=\dfrac{23}{24}$，$a_4=\dfrac{23}{24}+\dfrac{4}{5!}=\dfrac{119}{120}$

(2)　(1) から，$n=1$，2，3，4 に対して　　$a_n=\dfrac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$

すなわち　　$a_n=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

よって，$a_n=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ …… ② と推測される。

[1]　$n=1$ のとき　(1) から，② は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，② が成り立つと仮定すると　　$a_k=1-\dfrac{1}{(k+1)!}$

① から，$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1}=a_k+\frac{k+1}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}$$
$$=1-\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+2)!}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときにも ② は成り立つ。

[1]，[2] により，すべての自然数 n について ② は成り立つ。

$\boxed{6}$ (1)　$(n+1)$ 個の数の和が偶数になるには，次の [1]，[2] の場合がある。

[1]　n 個の数の和が偶数で，$(n+1)$ 回目に偶数が書かれた球を取り出す。

[2]　n 個の数の和が奇数で，$(n+1)$ 回目に奇数が書かれた球を取り出す。

[1]，[2] は互いに排反であるから　　$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{3}{7}+(1-p_n)\cdot\dfrac{4}{7}$

ゆえに　　$p_{n+1}=-\dfrac{1}{7}p_n+\dfrac{4}{7}$

(2)　(1) の式を変形すると　　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{7}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{7}$，初項 $\left(p_1-\dfrac{1}{2}\right)$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$$

ゆえに　　$p_n=-\dfrac{1}{14}\cdot\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n+\dfrac{1}{2}$

7 求める和は

$$S-\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=S-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{1}{24}n(n-1)\{(n+1)(3n+2)-4(2n-1)-12\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n-1)\cdot 3(n^2-n-2)=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)$$

8 この数列を，次のように1個，2個，3個，…… の群に分ける。

$$\left\{\frac{1}{1}\right\},\ \left\{\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right\},\ \left\{\frac{1}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{5}{3}\right\},\ \left\{\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\right\},\ \cdots\cdots$$

このとき，第 n 群の m 番目の数は $\dfrac{2m-1}{n}$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$ と表される。

(1) $\dfrac{5}{9}$ は第9群の3番目の数である。

また，第1群から第 n 群までに入る数の総数を l_n とすると

$$l_n=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって，第1群から第8群までに入る数の総数は

$$l_8=\frac{1}{2}\times 8\times 9=36$$

したがって，$36+3=39$ より，$\dfrac{5}{9}$ は第39項

(2) 第800項が第 n 群に含まれるとすると

$$l_{n-1}<800\leqq l_n$$

よって　　$(n-1)n<1600\leqq n(n+1)$

$n=40$ のとき　$(n-1)n=1560$,

$n(n+1)=1640$

n は自然数であるから　　$n=40$

第1群から第39群までに入る数の総数は

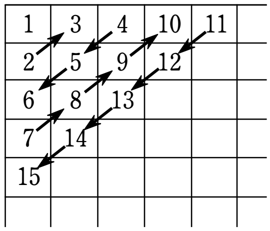
$$l_{39}=\frac{1}{2}\times 39\times 40=780$$

よって，第800項は第40群の20番目の数である。

したがって，第800項は　　$\dfrac{2\times 20-1}{40}=\dfrac{39}{40}$

9　並べられた自然数を，次のように区分する。

1 ｜ 2，3 ｜ 4，5，6 ｜ 7，8，9，10 ｜，……　　……①



(1)　1 番上の段の左から n 番目の数は，n が偶数のとき，① の第 n 群の末項である。

よって，求める数は　$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2)　1 番上の段の左から n 番目の数は，n が奇数のとき，① の第 n 群の初項である。

$n\geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群の末項は

$$1+2+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

よって，n が 3 以上の奇数のとき，求める数は

$$\frac{1}{2}n(n-1)+1=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

これは $n=1$ のときにも適する。　答　$\frac{1}{2}(n^2-n+2)$

(3)　1000 が ① の第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1)<1000\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

また，$\frac{1}{2}n(n-1)$ は単調に増加する。

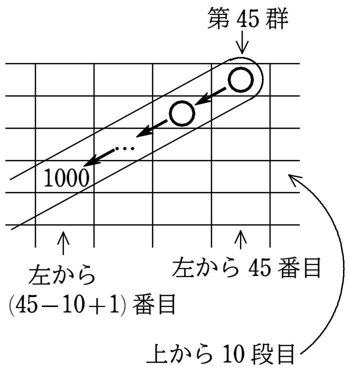
$\frac{44\cdot 45}{2}=990$，$\frac{45\cdot 46}{2}=1035$ であるから

$$n=45$$

よって，1000 は第 45 群の $1000-990=10$ (番目) の数である。

したがって，1000 は，左から

$45-10+1=36$ (番目)，上から 10 段目にある。



10 (1)　0 以上の整数 x のとりうる値は　$x=0,\ 1,\ 2$

$3x+2y\leqq 8$ を満たす 0 以上の整数 y は

$x=0$ のとき，$2y\leqq 8$ から　$y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$x=1$ のとき，$3+2y\leqq 8$ から　$y=0,\ 1,\ 2$

$x=2$ のとき，$6+2y\leqq 8$ から　$y=0,\ 1$

以上から，求める整数の組 $(x,\ y)$ の個数は 10 個

(2)　$3x+2y\leqq 2008$ ……①　とする。

0 以上の整数 x のとりうる値は　$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 669$

[1]　$x=2k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334)$ のとき

① から　$6k+2y\leqq 2008$　よって　$y\leqq 1004-3k$　……②

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334$ のそれぞれの k の値に対し，② を満たす 0 以上の整数 y は $(1005-3k)$ 個ある。

[2]　$x=2k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334)$ のとき

① から　$6k+3+2y\leqq 2008$　よって　$y\leqq 1002.5-3k$　……③

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334$ のそれぞれの k の値に対し，③ を満たす 0 以上の整数 y は $(1003-3k)$ 個ある。

[1]，[2] から，① を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\sum_{k=0}^{334}\{(1005-3k)+(1003-3k)\}=\sum_{k=0}^{334}(2008-6k)=\frac{1}{2}\times 335\times(2008+4)$$

$$=337010\quad(\text{個})$$

11 (1)　長さ 1 の単語：a，b，c

長さ 2 の単語：aa，bb，cc，ab，ba，bc，cb，ca，ac

長さ 3 の単語：aaa，bbb，ccc，aab，aba，baa，aac，aca，caa，bba，bab，abb，bbc，bcb，cbb，cca，cac，acc，ccb，cbc，bcc，abc，acb，bac，bca，cab，cba

(2)　x_{n+1} を次の [1]～[3] の場合に分けて考える。

[1]　最初の文字が a のとき

残りの n 個の文字には a が偶数個含まれるから，単語の数は　y_n

[2]　最初の文字が b のとき

残りの n 個の文字には a が奇数個含まれるから，単語の数は　x_n

[3]　最初の文字が c のとき

残りの n 個の文字には a が奇数個含まれるから，単語の数は　x_n

よって　$x_{n+1}=2x_n+y_n$　…… ①

また，長さ n の単語は，3 文字 a，b，c から重複を許して n 個並べたものであるから，全部で 3^n 個ある。

よって　$x_n+y_n=3^n$　　ゆえに　$y_n=3^n-x_n$　…… ②

② を ① に代入して　$x_{n+1}=2x_n+(3^n-x_n)$

すなわち　$x_{n+1}-x_n=3^n$　　また，(1) から　$x_1=1$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに　$x_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$　　② に代入して　$y_n=\frac{1}{2}(3^n+1)$

12 数学的帰納法により証明する．

[1]　$n=0$ のとき

$$(\text{左辺})=f_0(2\cos\theta)=1$$

$$(\text{右辺})=\frac{\sin(0+1)\theta}{\sin\theta}=1$$

よって，成り立つ．

$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=f_1(2\cos\theta)=2\cos\theta$$

$$(\text{右辺})=\frac{\sin(1+1)\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$$

よって，成り立つ．

[2]　$n=k-1$，k $(k\geqq 1)$ のとき成り立つと仮定する．

すなわち　$f_{k-1}(2\cos\theta)=\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$

$$f_k(2\cos\theta)=\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})&=f_{k+1}(2\cos\theta)\\
&=2\cos\theta\, f_k(2\cos\theta)-f_{k-1}(2\cos\theta)\\
&=2\cos\theta\cdot\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\\
&=2\cos\theta\cdot\frac{\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\\
&=\frac{(2\cos^2\theta-1)\sin k\theta+2\sin\theta\cos\theta\cos k\theta}{\sin\theta}\\
&=\frac{\cos 2\theta\sin k\theta+\sin 2\theta\cos k\theta}{\sin\theta}\\
&=\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}=(\text{右辺})
\end{aligned}$$

よって，成り立つ．

以上から，$n\geqq 0$ であるすべての n について $f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ と表される．

13 (1)　$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ のとき $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ を数学的帰納法で証明する．

$(1+\sqrt{2})^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(a_n+b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$ から

$a_{n+1}=a_n+2b_n$, $b_{n+1}=a_n+b_n$ が成り立つ．

[1]　$n=1$ のとき　$a_1=b_1=1$ で成り立つ．

[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると　$(1-\sqrt{2})^k=a_k-b_k\sqrt{2}$

$n=k+1$ のとき

$(1-\sqrt{2})^{k+1}=(a_k-b_k\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=(a_k+2b_k)-(a_k+b_k)\sqrt{2}=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{2}$

$n=k+1$ のときも成り立つ．

よって，すべての自然数 n に対して成り立つ．

(2)　n を順次計算すると

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	3	7	17	41	99	239	577	1393
b_n	1	2	5	12	29	70	169	408	985

これから　$239+169\sqrt{2}<1000<577+408\sqrt{2}$

よって，$a_n+b_n\sqrt{2}>1000$ となる最小の自然数 n は　$n=8$

(3)　$(a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2})=\{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\}^n=(-1)^n$

よって　$b_n\sqrt{2}=a_n-\dfrac{(-1)^n}{a_n+b_n\sqrt{2}}$

上の表から $\dfrac{(-1)^n}{a_n+b_n\sqrt{2}}$ は $n\geqq 8$ のとき絶対値が 0.001 より小さい．

更に n が奇数ならば $b_n\sqrt{2}=a_n+k$ $(0<k<0.001)$ と表される．

すなわち $b_n\sqrt{2}$ の小数部分が 0.001 以下となる最小の n は $n=9$ で　$b_9=985$

$\boxed{14}$ $n=1$ のとき　$a_1a_2=2{a_1}^2$

$a_1=1$ であるから　$a_2=2$

$n=2$ のとき　$a_1a_2+a_2a_3=2(a_1a_2+a_2a_1)$

よって　$1\cdot2+2a_3=2(1\cdot2+2\cdot1)$　ゆえに　$a_3=3$

$n=3$ のとき　$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4=2(a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1)$

よって　$1\cdot2+2\cdot3+3a_4=2(1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1)$　ゆえに　$a_4=4$

したがって，$a_n=n$ …… ① と推測できる。

この推測が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n\leqq k$ のとき，① が成り立つと仮定すると　$a_n=n$ $(n\leqq k)$

このとき，条件式で $n=k$ とすると

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{k-1}a_k+a_ka_{k+1}$$
$$=2(a_1a_k+a_2a_{k-1}+\cdots\cdots+a_{k-1}a_2+a_ka_1)$$

よって　$1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+(k-1)k+ka_{k+1}$
$$=2\{1\cdot k+2\cdot(k-1)+\cdots\cdots+(k-1)\cdot2+k\cdot1\}$$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}i(i+1)+ka_{k+1}=2\sum_{i=1}^{k}i(k+1-i)$

したがって　$\displaystyle ka_{k+1}=2\sum_{i=1}^{k}i(k+1-i)-\sum_{i=1}^{k-1}i(i+1)$

$$=2\sum_{i=1}^{k-1}i(k+1-i)+2k\cdot1-\sum_{i=1}^{k-1}i(i+1)$$
$$=\sum_{i=1}^{k-1}i\{2(k+1-i)-(i+1)\}+2k=\sum_{i=1}^{k-1}i(2k+1-3i)+2k$$
$$=(2k+1)\sum_{i=1}^{k-1}i-3\sum_{i=1}^{k-1}i^2+2k$$
$$=(2k+1)\cdot\frac{1}{2}k(k-1)-3\cdot\frac{1}{6}k(k-1)(2k-1)+2k$$
$$=k(k-1)+2k=k(k+1)$$

よって　$a_{k+1}=k+1$

ゆえに，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

したがって　$a_n=n$