数学①　第１０回試練　二項定理

BASIC問題

1 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$　$(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

2 次の式の展開式において，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $\left(x-\dfrac{3}{x}\right)^5$　$[x]$　　(2) $\left(2x^2+\dfrac{3}{x}\right)^6$　$[x^3]$

3 $(a+b+c)^8$ の展開式における $a^3b^3c^2$ の項の係数を求めよ。

4 異なる n 個のものから r 個取る組合せの総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ とする。次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n$

(2) ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1}+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$

STANDARD問題

5 $(x^2-x+2)^4$ の展開式において，次の項の係数を求めよ。

(1) x^7 の係数　　(2) x^5 の係数

6 n は自然数とする。次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

(2) ${}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

7 二項定理を用いて，11^{25} の一の位の数と十の位の数をそれぞれ求めよ。

8 二項定理を用いて，13^{13} を 144 で割ったときの余りを求めよ。

9 $(x+2)^{20}$ を展開したときの x^r の係数を $f(r)$ とする。

(1) $0\leqq r\leqq 19$ のとき，等式 $f(r+1)-f(r)=\dfrac{20!\cdot 2^{19-r}}{(20-r)!(r+1)!}g(r)$ を満たす $g(r)$ を求めよ。

(2) (1) を利用して $f(r)$ を最大にする r の値を求めよ。

実戦問題

10 n を 3 以上の自然数とする。

(1) $2\leqq k\leqq n$ を満たす自然数 k について，$k(k-1){}_n\mathrm{C}_k=n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k-1){}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

数学①　第１０回試練　二項定理

$\boxed{1}$ 解答　略

$\boxed{2}$ 解答　(1)　90　　(2)　4320

$\boxed{3}$ 解答　560

$\boxed{4}$ 解答　(ア)　2^n　　(イ)　0

$\boxed{5}$ 解答　(1)　-4　　(2)　-28

$\boxed{6}$ 解答　(1)　略　　(2)　略

$\boxed{7}$ 解答　一の位の数は 1，十の位の数は 5

$\boxed{8}$ 解答　13

$\boxed{9}$ 解答　(1)　$g(r)=18-3r$　　(2)　$r=6$，7

$\boxed{10}$ 解答　(1)　略　　(2)　$n(n-1)\cdot 2^{n-2}$　　(3)　$n(n+1)\cdot 2^{n-2}$

$\boxed{1}$ $k\,{}_n\mathrm{C}_k = k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

$\boxed{2}$ (1)　展開式の一般項は　${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}\left(-\dfrac{3}{x}\right)^r = {}_5\mathrm{C}_r(-3)^r\dfrac{x^{5-r}}{x^r}$

$\dfrac{x^{5-r}}{x^r}=x$ とすると，両辺に x^r を掛けて　$x^{5-r}=x\cdot x^r$

よって，$5-r=1+r$　から　$r=2$

したがって，x の係数は　${}_5\mathrm{C}_2(-3)^2=10\times9=90$

(2)　展開式の一般項は　${}_6\mathrm{C}_r(2x^2)^{6-r}\left(\dfrac{3}{x}\right)^r = {}_6\mathrm{C}_r\cdot2^{6-r}\cdot3^r\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}$

$\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}=x^3$ とすると，両辺に x^r を掛けて　$x^{12-2r}=x^3\cdot x^r$

よって，$12-2r=3+r$　から　$r=3$

したがって，x^3 の係数は　${}_6\mathrm{C}_3\cdot2^3\cdot3^3=20\times8\times27=4320$

$\boxed{3}$ $\{(a+b)+c\}^8$ の展開式における c^2 を含む項は　${}_8\mathrm{C}_2(a+b)^6c^2$

また，$(a+b)^6$ の展開式における a^3b^3 の項の係数は　${}_6\mathrm{C}_3$

よって，$a^3b^3c^2$ の項の係数は　${}_8\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_3=560$

$\boxed{\text{別解}}$　$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ $(p+q+r=n)$ の項の係数は

$\dfrac{n!}{p!q!r!}$ であるから，求める係数は　$\dfrac{8!}{3!3!2!}=560$

$\boxed{4}$ 二項定理から

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n \quad\cdots\cdots①$$

① において，$a=1$，$b=1$ とすると

$$(1+1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n$$

すなわち　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n={}^{ア}2^n$

また，① において，$a=1$，$b=-1$ とすると

$$(1-1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot(-1)+{}_n\mathrm{C}_2\cdot(-1)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n\cdot(-1)^n$$

すなわち　${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1}+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n={}^{イ}0$

$\boxed{5}$ 一般項は　$\dfrac{4!}{p!q!r!}\cdot(-1)^q 2^r x^{2p+q}$

(1)　x^7 の係数を求めることから，$2p+q=7$ ……①，$p+q+r=4$ ……②

p，q，r は $p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$ の整数 ……③

① から $q=7-2p$　これを ② に代入すると　$p+(7-2p)+r=4$

すなわち　$r=p-3$

③ から $q=7-2p\geqq 0$，$r=p-3\geqq 0$　　よって　$3\leqq p\leqq \dfrac{7}{2}$

p は整数であるから　$p=3$

よって　$q=1$，$r=0$

ゆえに　求める係数は，$\dfrac{4!}{3!1!0!}(-1)^1\cdot 2^0=-4$

(2)　x^5 の係数を求めることから　$2p+q=5$ ……①，$p+q+r=4$ ……②，

p，q，r は $p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$ の整数　……③

① から $q=5-2p$　これを ② に代入すると，$p+(5-2p)+r=4$ すなわち $r=p-1$

③ から $q=5-2p\geqq 0$，$r=p-1\geqq 0$　　よって　$1\leqq p\leqq \dfrac{5}{2}$

p は整数であるから $p=1$，2

　$p=1$ のとき $q=5-2\cdot 1=3$，$r=1-1=0$

　$p=2$ のとき $q=5-2\cdot 2=1$，$r=2-1=1$

すなわち$(p, q, r)=(1, 3, 0), (2, 1, 1)$

よって係数は$\dfrac{4!}{3!}(-1)^3 2^0+\dfrac{4!}{2!}(-1)^1 2^1=-4-24=-28$

6 (1) 二項定理

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

において，$a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$ とすると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(-\frac{1}{2}\right)+{}_n\mathrm{C}_2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

すなわち　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0-\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}$

よって，与えられた等式が成り立つ。

(2) 二項定理から

$$(a+b)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0a^{2n}+{}_{2n}\mathrm{C}_1a^{2n-1}b+{}_{2n}\mathrm{C}_2a^{2n-2}b^2+{}_{2n}\mathrm{C}_3a^{2n-3}b^3$$
$$+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}ab^{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}b^{2n}\qquad\cdots\cdots①$$

① に $a=1$，$b=-1$ を代入すると

$$(1-1)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0-{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2-{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$$

よって　${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

この両辺の値を A とする。

① に $a=1$，$b=1$ を代入すると

$$(1+1)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$$

よって　$2^{2n}=({}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n})+({}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1})$

すなわち　$2^{2n}=2A$　　よって　$A=2^{2n-1}$

したがって

$${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}=2^{2n-1}$$

7 $(1+x)^{25}={}_{25}\mathrm{C}_0+{}_{25}\mathrm{C}_1\,x+{}_{25}\mathrm{C}_2\,x^2+\cdots+{}_{25}\mathrm{C}_{24}\,x^{24}+{}_{25}\mathrm{C}_{25}\,x^{25}$

ここで $x=10$ とおくと

$(1+10)^{25}={}_{25}\mathrm{C}_0+{}_{25}\mathrm{C}_1\,10+{}_{25}\mathrm{C}_2\,10^2+\cdots+{}_{25}\mathrm{C}_{25}\,10^{25}$

一の位と十の位の数字に関係のあるのは　${}_{25}\mathrm{C}_0+{}_{25}\mathrm{C}_1\cdot10=1+250=251$

したがって一の位の数は１，十の位の数は　5

$\boxed{8}$ 二項定理により　$13^{13}=(12+1)^{13}$

$$=12^{13}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times 12^{12}+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{11}\times 12^2+{}_{13}\mathrm{C}_{12}\times 12+1$$
$$=12^2(12^{11}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times 12^{10}+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{11})+13\times 12+1$$
$$=12^2(12^{11}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times 12^{10}+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{11})+12^2+13$$
$$=144(12^{11}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times 12^{10}+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{11}+1)+13$$

$12^{11}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times 12^{10}+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{11}+1$ は整数であるから，求める余りは　13

$\boxed{9}$ (1)　$(x+2)^{20}$ の展開式の一般項は　　${}_{20}\mathrm{C}_r\,x^r\cdot 2^{20-r}$

よって　　$f(r)={}_{20}\mathrm{C}_r\,2^{20-r}=\dfrac{20!\cdot 2^{20-r}}{r!(20-r)!}$

$0\leqq r\leqq 19$ のとき

$$f(r+1)-f(r)=\frac{20!\cdot 2^{20-(r+1)}}{(r+1)!\{20-(r+1)\}!}-\frac{20!\cdot 2^{20-r}}{r!(20-r)!}$$
$$=\frac{20!\cdot 2^{19-r}}{(r+1)!(19-r)!}-\frac{20!\cdot 2^{20-r}}{r!(20-r)!}$$
$$=\frac{20!\cdot 2^{19-r}}{(20-r)!(r+1)!}\{20-r-2(r+1)\}=\frac{20!\cdot 2^{19-r}}{(20-r)!(r+1)!}(18-3r)$$

よって　　$g(r)=18-3r$

(2)　$\dfrac{20!\cdot 2^{19-r}}{(20-r)!(r+1)!}>0$ であるから

$0\leqq r\leqq 5$ のとき　　$g(r)>0$ から　$f(r+1)>f(r)$

$r=6$ のとき　　$g(r)=0$ から　$f(r+1)=f(r)$

$7\leqq r\leqq 19$ のとき　　$g(r)<0$ から　$f(r+1)<f(r)$

よって　$f(0)<f(1)<f(2)<\cdots\cdots<f(5)<f(6)=f(7)>f(8)>\cdots\cdots>f(20)$

したがって，$f(r)$ を最大にする r の値は　　$r=6$，7

$\boxed{10}$ (1) $k(k-1)_n\mathrm{C}_k=k(k-1)\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n!}{(k-2)!(n-k)!}$

$$=n(n-1)\cdot\frac{(n-2)!}{(k-2)!\{(n-2)-(k-2)\}!}=n(n-1)_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k-1)_n\mathrm{C}_k=1\cdot0\cdot{}_n\mathrm{C}_1+\sum_{k=2}^{n}k(k-1)_n\mathrm{C}_k$

$$=0+\sum_{k=2}^{n}n(n-1)_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}\qquad\text{((1) より)}$$

$$=n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}{}_{n-2}\mathrm{C}_k$$

ここで　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}{}_{n-2}\mathrm{C}_k={}_{n-2}\mathrm{C}_0+{}_{n-2}\mathrm{C}_1+{}_{n-2}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{n-2}\mathrm{C}_{n-2}$

$$=(1+1)^{n-2}=2^{n-2}$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k-1)_n\mathrm{C}_k=n(n-1)\cdot2^{n-2}$

(3) $1\leqq k\leqq n$ を満たす自然数 k について

$$k_n\mathrm{C}_k=k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}=n_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=1}^{n}n_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k=n\cdot2^{n-1}$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2{}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)_n\mathrm{C}_k+\sum_{k=1}^{n}k_n\mathrm{C}_k$

$$=n(n-1)\cdot2^{n-2}+n\cdot2^{n-1}$$

$$=n(n+1)\cdot2^{n-2}$$