BASIC問題

1 １辺の長さが１の正四面体OABCを考える．
OA，OBの中点をそれぞれP，QとしOCを$m:n$に内分する点をRとする．また，△PQRの重心をGとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$m$，$n$を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$の長さ$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|$を求めよ.

2 $\vec{a}=(3,\ 0,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 4,\ -1)$の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

3 原点Oから，２点A(5，−2，−3)，B(8，0，−4)を通る直線に垂線OHを下ろす。このとき，点Hの座標と線分OHの長さを求めよ。

4 点A(3，1，2)，B(1，2，1)とxy平面上に動点Pがある。

(1) AP＋PBの最小値を求めよ。

(2) AP＋PBが最小となるときの点Pの座標を求めよ。

5 四面体ABCDがある．点Pが$10\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}+3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$を満たしているとき

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を用いて表せ.

(2) 四面体ABCDと四面体PBCDの体積の比を求めよ.

6 平行六面体OADB−CEGFにおいて，辺DGのGを越える延長上にGM＝2DGとなる点Mをとり，直線OMと平面ABCの交点をNとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) 線分比ON：OMを求めよ。

7 ３点A(3，6，0)，B(1，4，0)，C(0，5，4)がある。

(1) △ABCの面積を求めよ。

(2) 点P(3，4，5)から平面ABCに垂線PHを下ろす。このとき，線分PHの長さを求めよ。

(3) 四面体PABCの体積を求めよ。

実戦問題

8　xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に $x^2+y^2=25$ により定まる円 C があり，平面 $z=4$ の上に $x=1$ により定まる y 軸に平行な直線 ℓ がある。C 上の点 P で，ℓ 上の点との距離の最小値が 5 であるような P の座標をすべて求めよ。

9　点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通り $\overrightarrow{d_1}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線 ℓ_1 と，点 $(-1,\ 1,\ -2)$ を通り $\overrightarrow{d_2}=(0,\ -2,\ 1)$ に平行な直線 ℓ_2 がある。ℓ_1，ℓ_2 上にそれぞれ点 P，Q をとるとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

10　四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とする。$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　CH の長さを求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ。

11　すべての辺の長さが 1 の四角錐がある。この四角錐の頂点を O，底面を正方形 ABCD とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ求めよ。

(3)　点 P，O，B，C が正四面体の頂点となるようなすべての点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\boxed{1}$ 解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{m}{3(m+n)}\vec{c}$　(2) $\dfrac{\sqrt{11m^2+10mn+3n^2}}{6(m+n)}$

$\boxed{2}$ 解答 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\boxed{3}$ 解答 $\mathrm{H}(2,\ -4,\ -2)$, $\mathrm{OH}=2\sqrt{6}$

$\boxed{4}$ 解答 (1) $\sqrt{14}$　(2) $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3},\ 0\right)$

$\boxed{5}$ 解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}})$　(2) $s=\dfrac{1}{3}$, $t=\dfrac{1}{2}$, $k=-\dfrac{2}{3}$

(3) $2:5$

$\boxed{6}$ 解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$　(2) $\mathrm{ON}:\mathrm{OM}=1:5$

$\boxed{7}$ 解答 (1) 6　(2) 3　(3) 6

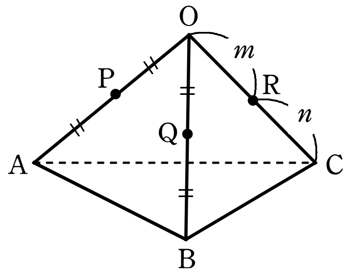
$\boxed{8}$ 解答 $(4,\ \pm3,\ 0)$, $(-2,\ \pm\sqrt{21},\ 0)$

$\boxed{9}$ 解答 $\sqrt{6}$

$\boxed{10}$ 解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(3) $\dfrac{1}{12}$

$\boxed{11}$ 解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$



1 (1) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}}{2}$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\vec{b}}{2}$，$\overrightarrow{OR}=\dfrac{m}{m+n}\vec{c}$

ゆえに $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})$

$=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{m}{3(m+n)}\vec{c}$

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60°=\dfrac{1}{2}$

よって $|\overrightarrow{OG}|^2=\dfrac{1}{36}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{36}|\vec{b}|^2+\dfrac{m^2}{9(m+n)^2}|\vec{c}|^2+\dfrac{1}{18}\vec{a}\cdot\vec{b}$

$+\dfrac{m}{9(m+n)}\vec{b}\cdot\vec{c}+\dfrac{m}{9(m+n)}\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=\dfrac{3(m+n)^2+4m^2+4m(m+n)}{36(m+n)^2}$

$=\dfrac{11m^2+10mn+3n^2}{36(m+n)^2}$

ゆえに $|\overrightarrow{OG}|=\dfrac{\sqrt{11m^2+10mn+3n^2}}{6(m+n)}$

2 求めるベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから $\vec{a}\cdot\vec{e}=0$ よって $x+z=0$ ……①

$\vec{b}\perp\vec{e}$ であるから $\vec{b}\cdot\vec{e}=0$ よって $3x+4y-z=0$ ……②

$|\vec{e}|=1$ であるから $|\vec{e}|^2=1$ よって $x^2+y^2+z^2=1$ ……③

①，② から $y=-x$，$z=-x$

③ に代入して $3x^2=1$ ゆえに $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$z=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$；$x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，求めるベクトルは $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

3 H は A，B を通る直線上にあるから，t を実数として $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ と表すことができる。

$\overrightarrow{AB}=(8-5,\ 0-(-2),\ -4-(-3))=(3,\ 2,\ -1)$ であるから

$\overrightarrow{OH}=(5,\ -2,\ -3)+t(3,\ 2,\ -1)$

$=(5+3t,\ -2+2t,\ -3-t)$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ であるから $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

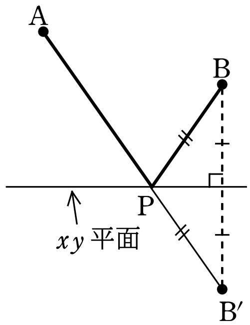
よって $3(5+3t)+2(-2+2t)-(-3-t)=0$ すなわち $t=-1$

したがって，点 H の座標は $(2,\ -4,\ -2)$

また，線分 OH の長さは　　$\mathrm{OH}=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$

$\boxed{4}$ (1)　点 B と xy 平面に関して対称な点を B′ とすると，その座標は

$$(1,\ 2,\ -1)$$



P は xy 平面上にあるから　　$\mathrm{PB}=\mathrm{PB'}$

ゆえに　　$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{AP}+\mathrm{PB'}$

$\mathrm{AP}+\mathrm{PB'}$ が最小となるのは，A，P，B′ が一直線上にあるときである。

よって，$\mathrm{AP}+\mathrm{PB'}$ の最小値は線分 AB′ の長さに等しい。

したがって，求める最小値は

$$\mathrm{AB'}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\right|=\sqrt{(1-3)^2+(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{14}$$

(2)　O を原点とし，点 P の座標を $(x,\ y,\ z)$ とする。

直線 AB′ 上の点 P のベクトル方程式は　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$ (t は実数)

(1) から　$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=(1,\ 2,\ -1)-(3,\ 1,\ 2)=(-2,\ 1,\ -3)$

ゆえに　$(x,\ y,\ z)=(3,\ 1,\ 2)+t(-2,\ 1,\ -3)$

$=(3-2t,\ 1+t,\ 2-3t)$　……①

ここで　点 P は xy 平面上にあるから　$z=0$

よって　$2-3t=0$ から　　$t=\dfrac{2}{3}$　……②

したがって　点 P の座標は ② を ① に代入して

$$\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ 0\right)$$

$\boxed{5}$ (1)　$10\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}+3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ から

$$-10\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+2\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+3\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)$$

よって　$-4\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$

(2)　(1) から　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\dfrac{1}{4}k\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$　……①

また，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}+t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(s\overrightarrow{\mathrm{BC}}+t\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left\{s\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+t\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right\}\\&=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\neq\vec{0}$ で $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ はどの 2 つも平行でないから，

①，② より　$-\dfrac{1}{4}k=1-s-t$，$-\dfrac{2}{4}k=s$，$-\dfrac{3}{4}k=t$

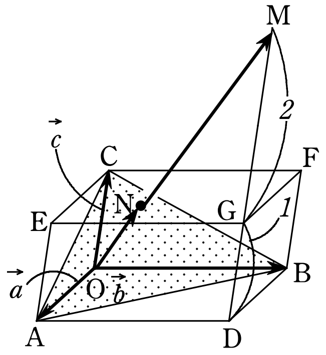
これを解くと　$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{1}{2}$，$k=-\dfrac{2}{3}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ から　PA：AQ＝3：2

底面積が等しい四面体の体積は高さに比例するから，四面体 ABCD と四面体 PBCD の比は

$$2:(2+3)=2:5$$

6　点 N は直線 OM 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となる実数 k がある。



ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=k(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+3k\vec{c}$

点 N は平面 ABC 上にあるから　$k+k+3k=1$

ゆえに　$k=\dfrac{1}{5}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

また　ON：OM＝1：5

7　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-3,\ 4-6,\ 0-0)=(-2,\ -2,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0-3,\ 5-6,\ 4-0)=(-3,\ -1,\ 4)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2)\times(-3)+(-2)\times(-1)+0\times4=8$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{26}$

ゆえに　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{8}{2\sqrt{2}\times\sqrt{26}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$0^\circ<\angle\mathrm{BAC}<180^\circ$ より $\sin\angle\mathrm{BAC}>0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

したがって，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=6$$

別解　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{8\cdot26-8^2}=6$

(2)　点 H は平面 ABC 上にあるから，s，t，u を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=s\overrightarrow{\mathrm{PA}}+t\overrightarrow{\mathrm{PB}}+u\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$s+t+u=1$　と表される。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(0,\ 2,\ -5)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-2,\ 0,\ -5)$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(-3,\ 1,\ -1)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=s(0,\ 2,\ -5)+t(-2,\ 0,\ -5)+u(-3,\ 1,\ -1)\\&=(-2t-3u,\ 2s+u,\ -5s-5t-u)\end{aligned}$$

PH⊥(平面 ABC) であるから　$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ から　$(-2t-3u)\times(-2)+(2s+u)\times(-2)+(-5s-5t-u)\times 0=0$

よって　$t+u=s$　……①

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ から　$(-2t-3u)\times(-3)+(2s+u)\times(-1)+(-5s-5t-u)\times 4=0$

よって　$11s+7t-2u=0$　……②

① を $s+t+u=1$ に代入すると　$s+s=1$　ゆえに　$s=\dfrac{1}{2}$

これを ①，② に代入して　$t+u=\dfrac{1}{2}$，$7t-2u=-\dfrac{11}{2}$

これを解いて　$t=-\dfrac{1}{2}$，$u=1$

このとき　$\overrightarrow{PH}=(-2,\ 2,\ -1)$

よって　$\mathrm{PH}=|\overrightarrow{PH}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=3$

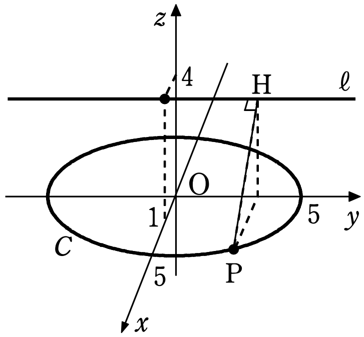
(3)　(1)，(2) の結果から，四面体 PABC の体積は

$$\frac{1}{3}\times S\times \mathrm{PH}=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot 3=6$$

$\boxed{8}$ 点 P は C 上にあるから，P$(5\cos\theta,\ 5\sin\theta,\ 0)$ とおける。

点 P から ℓ に下ろした垂線を PH とすると　H$(1,\ 5\sin\theta,\ 4)$

点 P と ℓ 上の点の距離の最小値は PH である。



PH＝5 より

$(5\cos\theta-1)^2+(5\sin\theta-5\sin\theta)^2+(0-4)^2=5^2$

よって，$5\cos\theta-1=\pm 3$ から　$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$-\dfrac{2}{5}$

$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ のとき　$\sin\theta=\pm\dfrac{3}{5}$，

$\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$ のとき　$\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

したがって，求める点 P の座標は　$(4,\ \pm 3,\ 0)$，$(-2,\ \pm\sqrt{21},\ 0)$

$\boxed{9}$ 直線 ℓ_1 上の点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ とすると

$$(x_1,\ y_1,\ z_1)=(1,\ 1,\ 0)+s(1,\ 1,\ -1)$$
$$=(1+s,\ 1+s,\ -s)$$

直線 ℓ_2 上の点を $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とすると

$$(x_2,\ y_2,\ z_2)=(-1,\ 1,\ -2)+t(0,\ -2,\ 1)$$
$$=(-1,\ 1-2t,\ -2+t)$$

点 P，Q の座標を，それぞれ

P$(1+s,\ 1+s,\ -s)$，Q$(-1,\ 1-2t,\ -2+t)$

とおくと

$$\mathrm{PQ}^2=\{-1-(1+s)\}^2+\{(1-2t)-(1+s)\}^2+\{(-2+t)-(-s)\}^2$$

$=(-s-2)^2+(-s-2t)^2+(s+t-2)^2$

$=3s^2+6st+5t^2-4t+8$

$=3(s+t)^2+2t^2-4t+8$

$=3(s+t)^2+2(t-1)^2+6$

よって，PQ^2 は $s+t=0$，$t-1=0$ すなわち $s=-1$，$t=1$ のとき最小となる。

$PQ>0$ であるから，このとき PQ も最小となる。

よって， PQ の最小値は　$\sqrt{6}$

参考　$s=-1$，$t=1$ のとき

$$\overrightarrow{PQ}=(-1,\ -1,\ -2)$$

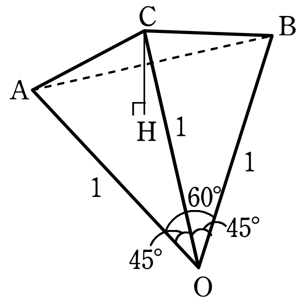
$$\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=1\times(-1)+1\times(-1)+(-1)\times(-2)=0$$

$$\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\times(-1)+(-2)\times(-1)+1\times(-2)=0$$

よって　$\overrightarrow{d_1}\perp\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{d_2}\perp\overrightarrow{PQ}$

したがって，PQ が最小となるとき $PQ\perp\ell_1$，$PQ\perp\ell_2$ が成り立つ。

10 (1)　点 H は平面 OAB 上にあるから，$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は実数) と表される。



よって　$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$

また　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=1$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$ であるから　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　すなわち　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

よって　$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　ゆえに　$s\cdot 1^2+t\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$

すなわち　$2s+t=\sqrt{2}$　…… ①

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$ であるから　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　すなわち　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

よって　$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　ゆえに　$s\cdot\dfrac{1}{2}+t\cdot 1^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$

すなわち　$s+2t=\sqrt{2}$　…… ②

①，② を解くと　$s=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　したがって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$

(2)　(1) より，$\overrightarrow{CH}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}$ であるから

$$|\overrightarrow{CH}|^2=\left|\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}\right|^2$$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2|\vec{a}|^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+1+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\mathrm{CH}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

よって，四面体 OABC の体積は　$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{12}$

11　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(2)　△OAB，△OBC，△OCD は１辺の長さが１の正三角形であるから

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$

また，同様にして，(1) から

$\frac{1}{2}=\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}+1$

ゆえに　$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ (x，y，z は実数) とする。

△OBC の重心を G とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{GP}}=x\vec{a}+\left(y-\frac{1}{3}\right)\vec{b}+\left(z-\frac{1}{3}\right)\vec{c}$

点 P が満たすべき条件は　$\overrightarrow{\mathrm{GP}}\perp\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{GP}}\perp\vec{c}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{GP}}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{GP}}\cdot\vec{c}=0$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=1$

(2) から　$\frac{1}{2}x+\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{3}\right)=0$ ……①

$\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right)+\left(z-\frac{1}{3}\right)=0$ ……②

$x^2+y^2+z^2+xy+yz=1$ ……③

② から　$y=1-2z$　このとき，① から　$x=3z-1$

これらを ③ に代入して整理すると　$2z(3z-2)=0$　ゆえに　$z=0,\ \frac{2}{3}$

よって　$(x,\ y,\ z)=(-1,\ 1,\ 0),\ \left(1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$