数学① 第７回試練 確率

BASIC問題

$\boxed{1}$ 男子 3 人と女子 2 人がくじ引きで順番を決めて横 1 列に並ぶとき，次の場合の確率を求めよ。

(1) 女子 2 人が隣り合う。　(2) 男女が交互に並ぶ。

$\boxed{2}$ 赤玉と白玉が合わせて 10 個入った袋がある。この袋の中から玉を 3 個同時に取り出すとき，赤玉が出ない確率が $\dfrac{7}{10}$ であるという。袋の中に白玉は何個入っているか。

$\boxed{3}$ 10 本のくじの中に，当たりくじが 3 本入っている。このくじを 3 本同時に引くとき，次の確率を求めよ。

(1) 3 本ともはずれる確率　(2) 少なくとも 1 本は当たる確率

$\boxed{4}$ 3 個のさいころを投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 出た目の最小値が 3 以上である確率

(2) 出た目の最小値が 3 である確率

$\boxed{5}$ A，B 2 社が同じ製品を製造している。A 社は全製品の 60 %，B 社は全製品の 40 % を生産している。また，A 社の製品中には 3 %，B 社の製品中には 6 % の不良品が混じっているという。全製品の中から 1 個を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1) それが不良品である確率

(2) 不良品であったときに，それが A 社の製品である確率

Standard問題

$\boxed{6}$ サイコロを続けて4回投げ，1回目，2回目，3回目，4回目に出た目をそれぞれ a，b，c，d とする。次の問に答えよ。

(1) $a<b<c<d$ となる確率を求めよ。

(2) $a \leqq b \leqq c \leqq d$ となる確率を求めよ。

$\boxed{7}$ 箱に 2 個の赤い玉と $(n-2)$ 個の白い玉が入っている $(n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots\cdots)$。

(1) 箱から 3 個の玉を同時に取り出すとき，2 個が白，1 個が赤となる確率 $P(n)$ を求めよ。

(2) (1) の $P(n)$ が最大になる n を求めよ。

$\boxed{8}$ 硬貨を何回か投げ，先に表が 2 回出ると A の勝ちとし，先に裏が 4 回出ると B の勝ちとするゲームを考える。次の確率を求めよ。

(1) 5 回目に B が勝つ確率　(2) A，B それぞれの勝つ確率

9 次の確率を求めよ.

(1) 2人でジャンケンをするとき，2回続けてアイコになる確率

(2) 3人で1回ジャンケンをして，1人の勝者が決まる確率

(3) 5人で1回ジャンケンをして，3人の勝者が決まる確率

(4) 5人で1回ジャンケンをして，複数の敗者がでて，複数の勝者が残り，次にその勝者のみで2回目のジャンケンをして，1人の勝者が決まる確率

実戦問題

10 4つのさいころを同時に振るとき，次の確率を求めよ。

(1) 4つとも同じ目が出る確率

(2) 3つのさいころに同じ目が出て，他の1つにはその目と異なる目が出る確率

(3) 2つの異なる目がそれぞれ2つずつ出る確率

(4) 2つのさいころに同じ目が出て，他の2つにはその目と異なりかつ互いに異なる目が出る確率

(5) 連続した4つの自然数の目が出る確率

11 数直線上を点Pが1ステップごとに，$+1$ または -1 だけそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する。数直線上の値が3の点をAとして，PがAにたどり着くと停止する。

(1) Pが原点Oから出発して，ちょうど5ステップでAにたどり着く確率を求めよ。

(2) Pが原点Oから出発して，ちょうど6ステップで値が2の点Bにたどり着く確率を求めよ。

(3) Pが原点Oから出発して，8ステップ以上移動する確率を求めよ。

12 正四面体ABCDを考える。点Pは時刻0では頂点Aに位置し，1秒ごとにある頂点から他の3頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする。このとき，時刻0から時刻 n までの間に，4頂点A，B，C，Dのすべてに点Pが現れる確率を求めよ。ただし，n は1以上の整数とする。

$\boxed{1}$ 解答 (1) $\dfrac{2}{5}$　(2) $\dfrac{1}{10}$

$\boxed{2}$ 解答 9個

$\boxed{3}$ 解答 (1) $\dfrac{7}{24}$　(2) $\dfrac{17}{24}$

$\boxed{4}$ 解答 (1) $\dfrac{8}{27}$　(2) $\dfrac{37}{216}$

$\boxed{5}$ 解答 (1) $\dfrac{21}{500}$　(2) $\dfrac{3}{7}$

$\boxed{6}$ 解答 (1) $\dfrac{5}{432}$　(2) $\dfrac{7}{72}$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $P(n)=\dfrac{6(n-3)}{n(n-1)}$　(2) $\dfrac{P(n+1)}{P(n)}=\dfrac{n^2-3n+2}{n^2-2n-3}$，$n=5$　(3) $n=5$，6

$\boxed{8}$ 解答 (1) $\dfrac{1}{8}$　(2) 順に $\dfrac{13}{16}$，$\dfrac{3}{16}$

$\boxed{9}$ 解答 (1) $\dfrac{1}{9}$　(2) $\dfrac{1}{3}$　(3) $\dfrac{10}{81}$　(4) $\dfrac{10}{81}$

$\boxed{10}$ 解答 (1) $\dfrac{1}{216}$　(2) $\dfrac{5}{54}$　(3) $\dfrac{5}{72}$　(4) $\dfrac{5}{9}$　(5) $\dfrac{1}{18}$

$\boxed{11}$ 解答 (1) $\dfrac{3}{32}$　(2) $\dfrac{9}{64}$　(3) $\dfrac{91}{128}$

$\boxed{12}$ 解答 $1-3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\boxed{1}$ 5人全員の並び方は　5! 通り

(1) 女子2人を1組と考えると，この1組と男子3人の並び方は　4! 通り

また，1組にした女子2人の並び方は　2通り

よって，求める確率は　$\dfrac{4!\times 2}{5!}=\dfrac{2}{5}$

(2) 男女が交互に並ぶのは，男女男女男 となる場合である。

男子3人の並び方は　3! 通り，　女子2人の並び方は　2通り

よって，求める確率は　$\dfrac{3!\times 2}{5!}=\dfrac{2}{5\cdot 4}=\dfrac{1}{10}$

$\boxed{2}$ 白玉が n 個入っているとする。$(1\leqq n\leqq 10)$

起こりうる場合の総数は　${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通り

赤玉が出ない場合は，白玉を3個取り出す場合であるから，その総数は　${}_n\mathrm{C}_3$ 通り

よって　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{7}{10}$

ゆえに　$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{10\cdot9\cdot8}=\dfrac{7}{10}$

したがって　$n(n-1)(n-2)=9\cdot8\cdot7$

$1\leqq n\leqq10$ である自然数のうち，この等式を満たすものは　$n=9$

よって，白玉は9個入っている。

3 (1) 「3本ともはずれる」という事象を A とする。

くじを3本同時に引く方法は　${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$ (通り)

3本ともはずれる場合は　${}_{7}\mathrm{C}_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ (通り)

よって　$P(A)=\dfrac{35}{120}=\dfrac{7}{24}$

(2) 「少なくとも1本は当たる」という事象を B とすると，余事象 $\overline{B}$ は，「3本とも当たらない」，すなわち「3本ともはずれる」という事象 A であるから　$P(\overline{B})=P(A)$

よって，求める確率は　$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(A)=1-\dfrac{7}{24}=\dfrac{17}{24}$

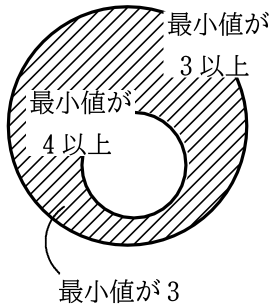
4 (1) 出た目の最小値が3以上であるのは，3個とも3以上の目が出る場合であるから，求める確率は　$\dfrac{4^3}{6^3}=\dfrac{8}{27}$

(2) 出た目の最小値が4以上であるのは，3個とも4以上の目が出る場合である。

このときの確率は　$\dfrac{3^3}{6^3}$

よって，出た目の最小値が3である確率は

$$\frac{4^3}{6^3}-\frac{3^3}{6^3}=\frac{37}{216}$$



5 A社の製品であるという事象を A，B社の製品であるという事象を B，不良品であるという事象を E とする。

このとき，A と B は互いに排反であり

$$P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\ P(B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5},\ P_A(E)=\frac{3}{100},\ P_B(E)=\frac{6}{100}$$

(1) 取り出した1個が不良品であるという事象は，次の2つの事象の和事象である。

[1] 不良品がA社の製品の場合

その確率は　$P(A\cap E)=P(A)P_A(E)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{100}=\dfrac{9}{500}$

[2] 不良品がB社の製品の場合

その確率は　$P(B\cap E)=P(B)P_B(E)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{6}{100}=\dfrac{12}{500}$

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(E)=\frac{9}{500}+\frac{12}{500}=\frac{21}{500}$$

(2)　求める確率は $P_E(A)$ であるから

$$P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{9}{500}\div\frac{21}{500}=\frac{3}{7}$$

6　すべての目の出方は 6^4 通り

(1) $a<b<c<d$ を満たす目の出方は，1～6から4つの目を選ぶ方法であり，

$_6C_4=15$ 通り。よって，求める確率は　$\dfrac{15}{6^4}=\dfrac{5}{432}$

(2) $a\leqq b\leqq c\leqq d$ を満たす目の出方は，1～6の目の出る回数の定め方である。

それは，1，2，3，4，5，6 がそれぞれ x，y，z，u，v，w 回出るとすると

$x+y+z+u+v+w=4$　（x，y，z，u，v，w は非負整数）　を満たすような

$(x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w)$ の組数である。これは4つの ◯ を6人で分ける＝5か所で仕切る方法，

つまり◯4つ，｜5つを並べる方法と同じ。

$_9C_4=126$ 通り。よって，求める確率は　$\dfrac{126}{6^4}=\dfrac{7}{72}$

7　(1)　玉は全部で n 個あるから，3 個の玉の取り出し方は　$_n\mathrm{C}_3$ 通り。

2 個の白玉と 1 個の赤玉の取り出し方は　$_{n-2}\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1$（通り）

よって　$P(n)=\dfrac{_{n-2}\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{_n\mathrm{C}_3}=\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}\times2\div\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=\dfrac{6(n-3)}{n(n-1)}$

(2)　(1) より $P(n+1)=\dfrac{6\{(n+1)-3\}}{(n+1)\{(n+1)-1\}}=\dfrac{6(n-2)}{(n+1)n}$ であるから

$$\frac{P(n+1)}{P(n)}=\frac{6(n-2)}{(n+1)n}\cdot\frac{n(n-1)}{6(n-3)}=\frac{(n-2)(n-1)}{(n+1)(n-3)}=\frac{n^2-3n+2}{n^2-2n-3}$$

$\dfrac{P(n+1)}{P(n)}=1$ となるのは　$n^2-3n+2=n^2-2n-3$　　よって　$n=5$　のとき。

$n^2-3n+2-(n^2-2n-3)=5-n$ であるから

$n=4$ のとき　$n^2-3n+2>n^2-2n-3$，$n=5$ のとき　$n^2-3n+2=n^2-2n-3$，

$n\geqq6$ のとき　$n^2-3n+2<n^2-2n-3$

よって　$\dfrac{P(5)}{P(4)}>1$，$\dfrac{P(6)}{P(5)}=1$，$\dfrac{P(7)}{P(6)}<1$，$\dfrac{P(8)}{P(7)}<1$，……

すなわち　$P(4)<P(5)=P(6)>P(7)>P(8)>\cdots\cdots$

したがって，$P(n)$ が最大となる n は　$n=5$，6

8 (1) 4回目までに表が1回，裏が3回出て，5回目に裏が出る場合である。

よって，求める確率は $\quad {}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(2) Bが勝つのは，4回目に勝つ場合と，5回目に勝つ場合がある。

Bが4回目に勝つのは，裏が4回続けて出る場合であるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

Bが5回目に勝つ確率は，(1)から $\quad \frac{1}{8}$

よって，Bが勝つ確率は $\quad \frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}$

このゲームに引き分けはないから，Aが勝つ確率は $\quad 1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$

9 (1) 2人の1回のジャンケンの手の出し方は 3^2 通り．

1回ジャンケンをしてアイコになる場合は3通り．

よって，1回のジャンケンでアイコになる確率は $\quad \frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$

ゆえに，2回続けてアイコになる確率は $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(2) 3人のジャンケンの手の出し方は 3^3 通り．

勝者の決まり方は ${}_3C_1$ 通りであり，勝者の手の出し方は3通りであるから，1人の勝者が決まる場合は ${}_3C_1\times3$ 通り．

ゆえに $\quad \frac{{}_3C_1\times3}{3^3}=\frac{1}{3}$

(3) 5人のジャンケンの手の出し方は 3^5 通り．

勝者の決まり方は ${}_5C_3$ 通りであり，勝者の手の出し方は3通りであるから，3人の勝者が決まる場合は ${}_5C_3\times3$ 通り．

ゆえに $\quad \frac{{}_5C_3\times3}{3^5}=\frac{10}{81}$

(4) [1] 1回目の勝者が3人で，2回目に1人の勝者が決まる確率は，(2)，(3)から

$$\frac{10}{81}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{243}$$

[2] 1回目の勝者が2人となる確率は $\quad \frac{{}_5C_2\times3}{3^5}=\frac{10}{81}$

残った2人から1人の勝者が決まる確率は $\quad \frac{{}_2C_1\times3}{3^2}=\frac{2}{3}$

ゆえに，1回目の勝者が2人で，2回目に1人の勝者が決まる確率は

$$\frac{10}{81}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{243}$$

[1]，[2] から $\dfrac{10}{243}+\dfrac{20}{243}=\dfrac{30}{243}=\dfrac{10}{81}$

$\boxed{10}$ 4 つのさいころの目の出方は，全部で 6^4 通り

(1) 4 つとも同じ目が出る場合は，

$$(1,\ 1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2,\ 2),\ \cdots\cdots,\ (6,\ 6,\ 6,\ 6)$$

の 6 通りある。

よって，求める確率は $\dfrac{6}{6^4}=\dfrac{1}{216}$

(2) 同じ目が出る 3 つのさいころを選ぶ方法は ${}_4C_3=4$ (通り)

その目の選び方は 6 通り

そのおのおのについて，残り 1 つのさいころの目の出方は 5 通り

よって，求める確率は $\dfrac{4\times6\times5}{6^4}=\dfrac{5}{54}$

(3) 2 つの異なる目を選ぶ方法は ${}_6C_2=15$ (通り)

選んだ 2 つの目のうち一方の目が出る 2 つのさいころの選び方は ${}_4C_2=6$ (通り)

よって，求める確率は $\dfrac{15\times6}{6^4}=\dfrac{5}{72}$

(4) 同じ目が出る 2 つのさいころを選ぶ方法は ${}_4C_2=6$ (通り)

その目の選び方は 6 通り

そのおのおのについて，残り 2 つのさいころの目の出方は ${}_5P_2=5\cdot4=20$ (通り)

よって，求める確率は $\dfrac{6\times6\times20}{6^4}=\dfrac{5}{9}$

(5) 連続した 4 つの自然数となる目の組合せは

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5),\ (3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

の 3 通りがあり，目の出方はこの各組の順列であるから ${}_4P_4\times3=4!\times3$ (通り)

よって，求める確率は $\dfrac{4!\times3}{6^4}=\dfrac{1}{18}$

11 ⑴ 右の図のように，ステップの数を横軸に，点 P の数直線上の値を縦軸にとったとき，点 P が

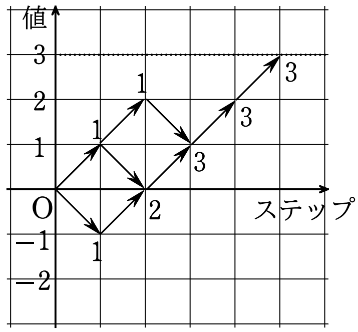
$+1$ だけ進むことは ↗，

-1 だけ進むことは ↘

が対応する。

ちょうど 5 ステップで値が 3 の点 A にたどり着くのは図の実線の経路を通る場合で，全部で

3 通り



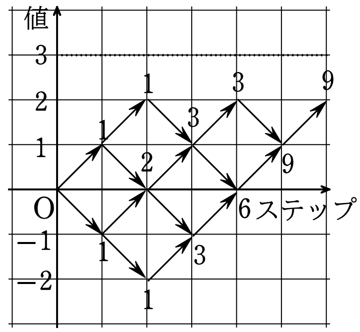
1 つの経路を通る確率は $\frac{1}{2^5}$ であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2^5}\times 3=\frac{3}{32}$$

⑵ ちょうど 6 ステップで値が 2 の点 B にたどり着くのは，5 ステップで値が 1 の点にたどり着いている場合である。

この場合の数は，右の図から全部で

9 通り



よって，求める確率は

$$\frac{1}{2^6}\times 9=\frac{9}{64}$$

⑶ 8 ステップ以上移動する事象は，7 ステップ以下で A にたどり着く場合の余事象である。

A にたどり着くのはステップが奇数回のときであるから，7 ステップ以下なら次の [1] ～ [3] のいずれかになる。

[1] 3 ステップで A にたどり着く。

$+1$ が 3 回続く場合であるから，この確率は $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

[2] 5 ステップで A にたどり着く。

この確率は ⑴ から $\frac{3}{32}$

[3] 7 ステップで A にたどり着く。

6 ステップで値が 2 の点にたどり着いているから，この確率は ⑵ から

$$\frac{9}{64}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{128}$$

以上から，求める確率は $1-\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{9}{128}\right)=\frac{91}{128}$

12 時刻 1 で点 B，C，D に動く確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$

時刻 1 で点 B に動く場合，時刻 n までの間に 4 頂点のすべてに点 P が現れる確率は

$1-$(C または D に行かない確率)

$=1-\{$(C に行かない確率)$+$(D に行かない確率)

$-$(C にも D にも行かない確率)$\}$

$$=1-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=1-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

時刻 1 で点 C，D に動く場合も，時刻 n までの間に 4 頂点のすべてに点 P が現れる確率は同じである。

以上から，求める確率は　$\frac{1}{3}\cdot\left\{1-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\times 3=1-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$