BASIC問題

1 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}$

2 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x\cos 2x$　　(2) $y=\sin 3x\cos x$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{3+\sin x}$　　(2) $y=\dfrac{x^2}{\cos x}$

4 次の関数を微分せよ。ただし，$a>0$，$a\fallingdotseq 1$ とする。

(1) $y=\tan 3x$　　(2) $y=\sin x^3$　　(3) $y=\cos^3 x$

(4) $y=\log(\sin x)$　　(5) $y=\log\left|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right|$　　(6) $y=e^{-2x}\cos 2x$

(7) $y=a^{-x^2}$

5 媒介変数で表された次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x=\dfrac{e^{3t}}{1+t^2}$，$y=\dfrac{t}{1+t^2}$　　(2) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$

6 関数 $y=x^{2x}\ (x>0)$ を微分せよ。

7 次の x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を x，y で表せ。

(1) $x^2-xy-y^2=1$　　(2) $x^3-xy^2+y^3=1$

STANDARD問題

8　関数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1 & (x\leqq 2 \text{ のとき})\\ x^2+ax+b & (2<x \text{ のとき})\end{cases}$ が $x=2$ で微分可能となるような定数 a，b の値を求めよ。

9　＊　関数 $y=\dfrac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+4}+4\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right\}$ を微分せよ。

10　＊　曲線 $2x^2-2xy+y^2=5$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

11　$f(x)=\cos x$ $(\pi<x<2\pi)$ の逆関数を $g(x)$ とする。このとき，$g(x)$ の導関数を求めよ。

12　関数 $x=3\cos t$，$y=2\sin t$ について，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t で表せ。

13　2 曲線 $y=ax^3$ と $y=3\log x$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致しているとき，定数 a の値を求めよ。また，その共有点における接線の方程式を求めよ。

14　2 つの曲線 $y=e^x$，$y=-e^{-x}$ に共通な接線の方程式を求めよ。

実戦問題

15　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}$ を求めよ。

16　関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。$f(1)=2$，$f'(1)=2$，$f''(1)=3$ のとき，

(1)　$g'(2)$ の値を求めよ。　　(2)　$g''(2)$ の値を求めよ。

17　a，b は定数で $a\fallingdotseq 0$ とする。関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+bx+a-b}{x^{2n}+(1-a)x^n+a}$ が $x>0$ で微分可能である条件を求めよ。

1 解答 (1) $5f'(a)$ (2) $2f(a)f'(a)$

2 解答 (1) $y'=\cos 2x-2x\sin 2x$ (2) $y'=3\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x$

3 解答 (1) $y'=-\dfrac{\cos x}{(3+\sin x)^2}$ (2) $y'=\dfrac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$

4 解答 (1) $y'=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$ (2) $y'=3x^2\cos x^3$ (3) $y'=-3\sin x\cos^2 x$

(4) $y'=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ (5) $y'=\dfrac{4}{4x^2-1}$ (6) $y'=-2e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)$

(7) $y'=-2xa^{-x^2}\log a$

5 解答 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-t^2}{(3t^2-2t+3)e^{3t}}$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=\tan t$

6 解答 $y'=2x^{2x}(\log x+1)$

7 解答 (1) $\dfrac{2x-y}{x+2y}$ (2) $\dfrac{3x^2-y^2}{y(2x-3y)}$

8 解答 $a=-6$，$b=9$

9 解答 $y'=\sqrt{x^2+4}$

10 解答 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

11 解答 $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12 解答 $-\dfrac{2}{9\sin^3 t}$

13 解答 $a=\dfrac{1}{e}$，$y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{e}}x-2$

14 解答 $y=ex$

15 解答 1

16 解答 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $-\dfrac{3}{8}$

17 解答 $a=1$，$b=2$

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)-\{f(a-3h)-f(a)\}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\left\{2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+3\cdot\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\right\}$

$=2f'(a)+3f'(a)=5f'(a)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\left[\{f(x)+f(a)\}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]=2f(a)f'(a)$

$\boxed{2}$ (1) $y'=\cos 2x+x(-\sin 2x)\cdot 2=\cos 2x-2x\sin 2x$

(2) $y'=(\cos 3x)\cdot 3\cos x+\sin 3x\cdot(-\sin x)=3\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x$

$\boxed{3}$ (1) $\displaystyle y'=-\frac{\cos x}{(3+\sin x)^2}$　　(2) $\displaystyle y'=\frac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle y'=\frac{(3x)'}{\cos^2 3x}=\frac{3}{\cos^2 3x}$

(2) $y'=\cos x^3\cdot(x^3)'=3x^2\cos x^3$

(3) $y'=3\cos^2 x\cdot(\cos x)'=3\cos^2 x\cdot(-\sin x)=-3\sin x\cos^2 x$

(4) $\displaystyle y'=\frac{\cos x}{\sin x}$

(5) $\displaystyle y=\log\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|=\log|2x-1|-\log|2x+1|$

$\displaystyle y'=\frac{2}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}=\frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{4}{4x^2-1}$

(6) $y'=(e^{-2x})'\cos 2x+e^{-2x}(\cos 2x)'=-2e^{-2x}\cos 2x-2e^{-2x}\sin 2x$

$=-2e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)$

(7) $y'=a^{-x^2}\log a\cdot(-x^2)'=-2xa^{-x^2}\log a$

$\boxed{5}$ (1) $\displaystyle\frac{dx}{dt}=\frac{3e^{3t}(1+t^2)-e^{3t}\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{e^{3t}(3t^2-2t+3)}{(1+t^2)^2}$,

$\displaystyle\frac{dy}{dt}=\frac{1\cdot(1+t^2)-t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$

したがって　$\displaystyle\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-t^2}{(3t^2-2t+3)e^{3t}}$

(2) $\displaystyle\frac{dx}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$

$\displaystyle\frac{dy}{dt}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$

したがって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{t\sin t}{t\cos t}=\tan t$

$\boxed{6}$ $x>0$ であるから　$x^{2x}>0$

両辺の対数をとると　$\log y=2x\log x$

この両辺を x で微分すると　$\dfrac{y'}{y}=2\log x+2x\cdot\dfrac{1}{x}=2(\log x+1)$

よって　$y'=2(\log x+1)\cdot x^{2x}=2x^{2x}(\log x+1)$

$\boxed{7}$ (1)　両辺を x で微分すると　$2x-\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)-2y\dfrac{dy}{dx}=0$

ゆえに　$(x+2y)\dfrac{dy}{dx}=2x-y$

よって，$x+2y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x+2y}$

(2)　両辺を x で微分すると　$3x^2-\left(y^2+x\cdot 2y\dfrac{dy}{dx}\right)+3y^2\dfrac{dy}{dx}=0$

ゆえに　$y(2x-3y)\dfrac{dy}{dx}=3x^2-y^2$

よって，$y(2x-3y)\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-y^2}{y(2x-3y)}$

$\boxed{8}$ 関数 $f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は $x=2$ で連続であるから

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$　すなわち　$\lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}f(x)=f(2)$

よって　$2^2+a\cdot 2+b=-2^2+2\cdot 2+1=1$

すなわち　$2a+b+4=1$　ゆえに　$b=-2a-3$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{h\to+0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}&=\lim_{h\to+0}\frac{(2+h)^2+a(2+h)+b-1}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{(2+h)^2+a(2+h)-2a-4}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{h^2+(a+4)h}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\{h+(a+4)\}=a+4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to-0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}&=\lim_{h\to-0}\frac{-(2+h)^2+2(2+h)+1-1}{h}\\&=\lim_{h\to-0}\frac{-h^2-2h}{h}\\&=\lim_{h\to-0}(-h-2)=-2\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるための条件は　$a+4=-2$

ゆえに　$a=-6$　　このとき　$b=9$

9　$y'=\dfrac{1}{2}\left\{(x)'\cdot\sqrt{x^2+4}+x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}\right)'\right\}+2\cdot\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)'}{x+\sqrt{x^2+4}}$

$$=\frac{1}{2}\left[1\cdot\sqrt{x^2+4}+x\cdot\left\{(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right\}'\right]+2\cdot\frac{\left\{x+(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right\}'}{x+\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+4}+x\cdot\left\{\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+4)'\right\}\right]$$

$$+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\left\{1+\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+4)'\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right)+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\right)+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\frac{x^2+4+x^2+4}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}$$

10　$2x^2-2xy+y^2=5$ の両辺を x で微分すると　$4x-2(y+xy')+2yy'=0$

ゆえに　$y'(y-x)+2x-y=0$

$x=1$，$y=3$ のとき　$y'=\dfrac{1}{2}$

よって，求める接線の方程式は　$y-3=\dfrac{1}{2}(x-1)$　　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

11　$y=g(x)$ とすると　$x=g^{-1}(y)=f(y)=\cos y$　$(\pi<y<2\pi)$

$x=\cos y$ の両辺を x で微分すると　$1=-\sin y\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$\pi<y<2\pi$ のとき，$\sin y<0$ であるから

$$g'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

12　$\dfrac{dx}{dt}=-3\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=2\cos t$　　ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2\cos t}{3\sin t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

よって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{2\cos t}{3\sin t}\right)\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\tan t}\right)\cdot\dfrac{1}{-3\sin t}$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\cdot\frac{1}{-3\sin t}=-\frac{2}{9\sin^3 t}$$

13　$f(x)=ax^3$，$g(x)=3\log x$ とすると　$f'(x)=3ax^2$，$g'(x)=\dfrac{3}{x}$

2 曲線の共有点の x 座標を p とすると，$f(p)=g(p)$ から　$ap^3=3\log p$　…… ①
また，2 曲線の共有点における接線が一致するから，$f'(p)=g'(p)$ により

$$3ap^2=\frac{3}{p}\qquad \text{すなわち}\qquad ap^3=1\quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　$3\log p=1$　　よって　$p=e^{\frac{1}{3}}$

これを ② に代入して　$ae=1$　　ゆえに　$a=\dfrac{1}{e}$

共有点の座標は $\left(e^{\frac{1}{3}},\ 1\right)$ であるから，接線の方程式は

$$y-1=\frac{3}{e^{\frac{1}{3}}}\left(x-e^{\frac{1}{3}}\right)\qquad \text{すなわち}\qquad y=\frac{3}{\sqrt[3]{e}}x-2$$

14　$y=e^x$ から　$y'=e^x$　　$y=-e^{-x}$ から　$y'=e^{-x}$
曲線 $y=e^x$ 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の方程式は

$$y-e^p=e^p(x-p)\qquad \text{すなわち}\quad y=e^px+(1-p)e^p\qquad \cdots\cdots ①$$

曲線 $y=-e^{-x}$ 上の点 $(q,\ -e^{-q})$ における接線の方程式は

$$y+e^{-q}=e^{-q}(x-q)\quad \text{すなわち}\quad y=e^{-q}x-(1+q)e^{-q}\quad \cdots\cdots ②$$

① と ② が一致するとき

$$e^p=e^{-q}\quad \cdots\cdots ③,\qquad (1-p)e^p=-(1+q)e^{-q}\quad \cdots\cdots ④$$

③ から　$q=-p$
これを ④ に代入して　$(1-p)e^p=-(1-p)e^p$
ゆえに　$p=1$　　したがって，求める方程式は　$y=ex$

15　$f(x)=\log x$ とすると　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\log x-0}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}=f'(1)$　　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから　(与式)$=1$

16　(1)　$y=g(x)=f^{-1}(x)$ とおくと　$x=f(y)$

したがって　$\dfrac{dx}{dy}=f'(y)$

ゆえに　$g'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{f'(y)}$

$f(1)=2$ から　$f^{-1}(2)=1$　　すなわち　$g(2)=1$
よって　$x=2$ のとき $y=1$

ゆえに　$g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{2}$

(2)　(1) より　$g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$

よって　$g''(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{f'(y)}\right\}=\dfrac{d}{dy}\left\{\dfrac{1}{f'(y)}\right\}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$$=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^2}\cdot\frac{1}{f'(y)}=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}$$

また，(1) より　$x=2$ のとき　$y=1$

ゆえに　$g''(2)=-\dfrac{f''(1)}{\{f'(1)\}^3}=-\dfrac{3}{2^3}=-\dfrac{3}{8}$

$\boxed{17}$ $0<x<1$ のとき　$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+bx+a-b}{x^{2n}+(1-a)x^n+a}=\frac{bx+a-b}{a}$

$1<x$ のとき　$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\dfrac{b}{x^{2n-1}}+\dfrac{a-b}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1-a}{x^n}+\dfrac{a}{x^{2n}}}=x^2$

また　$f(1)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+b+a-b}{1+(1-a)\cdot 1+a}=\frac{a+1}{2}$

$f(x)$ は $0<x<1$，$1<x$ で微分可能である。$x=1$ で微分可能となるためには，$x=1$ で連続であることが必要。その条件は

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$$

すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{bx+a-b}{a}=\lim_{x\to 1+0}x^2=\frac{a+1}{2}$

よって　$\dfrac{a+1}{2}=1$　　ゆえに　$a=1$　…… ①

① から　$0<x<1$ のとき　$f(x)=bx+1-b$，$f(1)=1$

よって，$x=1$ における右側微分係数と左側微分係数は

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to +0}(2+h)=2$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{\{b(1+h)+1-b\}-1}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{bh}{h}=\lim_{h\to -0}b=b$$

ゆえに，$f'(1)$ が存在するためには $b=2$ でなければならない。

逆に，$a=1$，$b=2$ のとき $f'(1)$ が存在して，$f(x)$ は $x>0$ で微分可能となる。

答　$a=1$，$b=2$