公式確認問題（省略可）

1 次の楕円の焦点の座標，長軸と短軸の長さ，焦点からの距離の和を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$　　(2) $4x^2+y^2=4$

2 次の双曲線の焦点と頂点の座標，漸近線の方程式，焦点からの距離の差を求め，曲線をかけ。

(1) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=1$　　(2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=-1$

3 次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(1) $y^2=-8x$　　(2) $x^2=2y$

4 次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$　$(-2\sqrt{5},\ 1)$　　(2) $y^2=4x$　$(1,\ -2)$

BASIC問題

5 次の方程式は放物線，楕円，双曲線のいずれを表すか。また，その焦点の座標を求めよ。

(1) $x-y^2+4y-3=0$　　(2) $4x^2+9y^2-16x+54y+61=0$

(3) $2x^2-9y^2+32x+36y+74=0$

6 双曲線 $4x^2-y^2-16x+2y-1=0$ の漸近線の方程式を求めよ。

7 次の曲線の方程式を求めよ。

(1) 焦点が A$(2,\ 2)$，準線が $x=-2$ である放物線

(2) 焦点 A$(8,\ -1)$，B$(0,\ -1)$ からの距離の和が 10 である楕円

(3) 焦点 A$(6,\ 1)$，B$(-4,\ 1)$ からの距離の差が 8 である双曲線

STANDARD問題

8 曲線 $x^2-4y^2=4$ に，点$(-2,\ 3)$から引いた接線の方程式を求めよ。

9 直線 $y=2x+k$ が楕円 $x^2+4y^2=4$ と異なる 2 点 P，Q で交わるとする。

(1) 定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (1) の範囲で k を動かしたとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

10 楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の焦点を F$(4,\ 0)$，F$'(-4,\ 0)$ とし，第1象限にある楕円上の点を P とする。また，O を原点として OP$=a$ とおく。

(1) PF＋PF$'$ の値を求めよ。

(2) PF^2＋PF$'^2$ および積 PF・PF$'$ を a を用いて表せ。

(3) $\angle$F$'$PF$=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，a の値を求めよ。

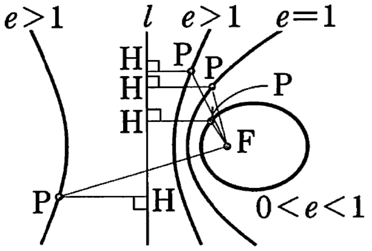
11 楕円 $x^2+4y^2=4$ 上の点 P と直線 $x+2y=3$ 上の点 Q について，2点 P，Q 間の距離の最小値を求めよ。

実戦問題

12 楕円 $4x^2+y^2=4$ の外部にある点 P$(a,\ b)$ からこの楕円に引いた2本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。

13 座標平面上に，原点 O を中心とする半径 $2a$ の円 C と，定点 F$(-2b,\ 0)$ $(0<b<a)$ をとる。C 上の点を Q とし，線分 FQ の垂直二等分線と線分 OQ との交点を P とする。点 Q が C 上を動くとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ。

14 双曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ の2つの焦点のうち $x>0$ である点を F，F に対する準線の方程式を $x=k$ $(k>0)$ とする。k の値と，曲線の離心率 e の値を求めよ。ただし，**離心率**に関しては次の解説を参考にしてよい。



PF：PH$=e$：1

一般に，点 P から定点 F への距離 PF と，定直線 l への距離の比の値 $e=\dfrac{\text{PF}}{\text{PH}}$ が一定であるとき，e の値をこの曲線の**離心率**といい，直線 l を焦点 F に対する**準線**という。

(1) $0<e<1$ のとき，F を焦点の1つとする楕円

(2) $e=1$ のとき，Fを焦点，を準線とする放物線

(3) $e>1$ のとき，Fを焦点の1つとする双曲線

となることが知られている。

$\boxed{1}$ 解答　焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さ，焦点からの距離の和の順に

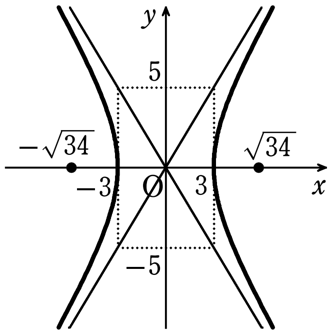
(1)　$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$，6，4，6　　(2)　$(0,\ \sqrt{3})$，$(0,\ -\sqrt{3})$，4，2，4

$\boxed{2}$ 解答　焦点の座標，頂点の座標，漸近線の方程式，焦点からの距離の差の順に

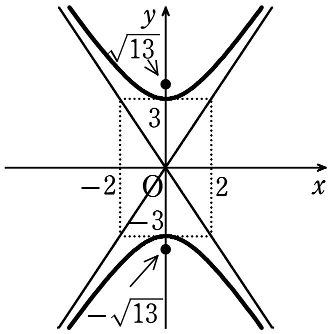
(1)　$(\sqrt{34},\ 0)$，$(-\sqrt{34},\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$，$y=\dfrac{5}{3}x$，$y=-\dfrac{5}{3}x$，6，〔図〕

(2)　$(0,\ \sqrt{13})$，$(0,\ -\sqrt{13})$，$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$，$y=\dfrac{3}{2}x$，$y=-\dfrac{3}{2}x$，6，〔図〕

(1)



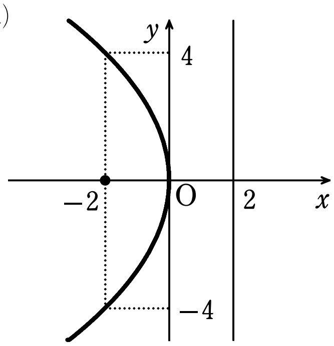
(2)



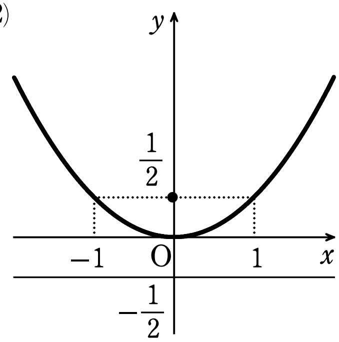
$\boxed{3}$ 解答　(1)　焦点は点$(-2,\ 0)$，準線は直線 $x=2$，概形は〔図〕

(2)　焦点は点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，準線は直線 $y=-\dfrac{1}{2}$，概形は〔図〕

(1)



(2)



$\boxed{4}$ 解答　(1)　$\sqrt{5}\,x+2y+8=0$

(2)　$x+y+1=0$

$\boxed{5}$ 解答 (1) 放物線，焦点の座標は $\left(-\dfrac{3}{4},\ 2\right)$

(2) 楕円，焦点の座標は $(2+\sqrt{5},\ -3)$，$(2-\sqrt{5},\ -3)$

(3) 双曲線，焦点の座標は $(-8+\sqrt{11},\ 2)$，$(-8-\sqrt{11},\ 2)$

$\boxed{6}$ 解答 $y=2x-3$，$y=-2x+5$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $(y-2)^2=8x$ (2) $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$ (3) $\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

$\boxed{8}$ 解答 $x=-2$，$5x+6y=8$

$\boxed{9}$ 解答 (1) $-\sqrt{17}<k<\sqrt{17}$ (2) 直線 $y=-\dfrac{1}{8}x$ の $-\dfrac{8\sqrt{17}}{17}<x<\dfrac{8\sqrt{17}}{17}$ の部分

$\boxed{10}$ 解答 (1) 10 (2) $\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2=2a^2+32$，$\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF}'=34-a^2$ (3) $a=\sqrt{22}$

$\boxed{11}$ 解答 $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{5}$

$\boxed{12}$ 解答 円 $x^2+y^2=5$

$\boxed{13}$ 解答 (1) 略 (2) $\dfrac{(x+b)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-b^2}=1$

$\boxed{14}$ 解答 $k=\dfrac{16}{5}$，$e=\dfrac{5}{4}$

$\boxed{1}$ (1) $\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

よって，焦点の座標は $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

長軸の長さは $2\times3=6$，短軸の長さは $2\times2=4$

焦点からの距離の和は $2\times3=6$

(2) 方程式を変形すると $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

よって，焦点の座標は $(0,\ \sqrt{3})$，$(0,\ -\sqrt{3})$

長軸の長さは $2\times2=4$，短軸の長さは $2\times1=2$

焦点からの距離の和は $2\times2=4$

$\boxed{2}$ (1) $\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

よって，焦点の座標は $(\sqrt{34},\ 0)$，$(-\sqrt{34},\ 0)$

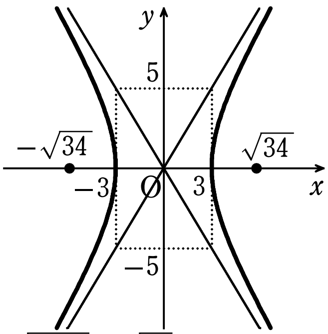
頂点の座標は $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$

漸近線の方程式は $y=\dfrac{5}{3}x$，$y=-\dfrac{5}{3}x$

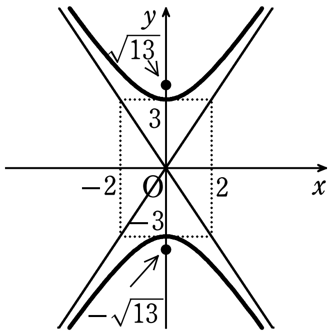
焦点からの距離の差は $2\times3=6$

曲線は図のようになる。

(1)



(2)



(2) $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

よって，焦点の座標は　$(0,\ \sqrt{13})$，$(0,\ -\sqrt{13})$

頂点の座標は　$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$

漸近線の方程式は　$y=\dfrac{3}{2}x$，$y=-\dfrac{3}{2}x$

焦点からの距離の差は　$2\times3=6$

曲線は図のようになる。

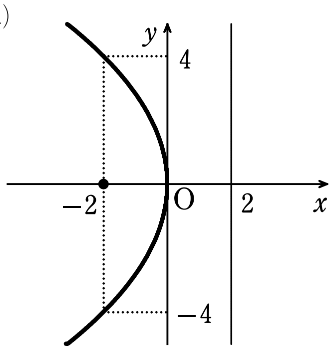
$\boxed{3}$ (1) $y^2=-8x$ から　$y^2=4\cdot(-2)\cdot x$

焦点は　点 $(-2,\ 0)$　　準線は　直線 $x=2$

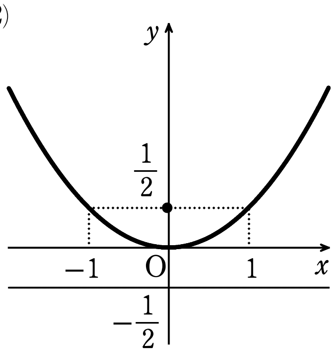
(2) $x^2=2y$ から　$x^2=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot y$

焦点は　点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$　　準線は　直線 $y=-\dfrac{1}{2}$

(1)



(2)



$\boxed{4}$ (1) 接線の方程式は　$\dfrac{1}{16}\cdot(-2\sqrt{5})x-\dfrac{1}{4}\cdot1\cdot y=1$

よって　　$\sqrt{5}x+2y+8=0$

(2) 接線の方程式は　$(-2)y=2(x+1)$

よって　　$x+y+1=0$

$\boxed{5}$ (1) この方程式を変形すると　　$x=(y^2-4y+4)-1$

すなわち　　$x=(y-2)^2-1$　　　　よって　　$(y-2)^2=4\cdot\dfrac{1}{4}\cdot(x+1)$　……①

① は，放物線 $y^2=x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線を表す。

放物線 $y^2=x$ の焦点の座標は $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$ であるから，放物線 ① の焦点の座標は

$$\left(-\frac{3}{4},\ 2\right)$$

(2)　この方程式を変形すると　　$4(x^2-4x+4)+9(y^2+6y+9)=16+81-61$

すなわち　　$4(x-2)^2+9(y+3)^2=36$

よって　　$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$　……①

①は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した楕円を表す。

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の焦点の座標は $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$ であるから，楕円①の焦点の座標は　　$(2+\sqrt{5},\ -3)$，$(2-\sqrt{5},\ -3)$

(3)　この方程式を変形すると　　$2(x^2+16x+64)-9(y^2-4y+4)=128-36-74$

すなわち　　$2(x+8)^2-9(y-2)^2=18$

よって　　$\dfrac{(x+8)^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{2}=1$　……①

①は，双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{2}=1$ を x 軸方向に -8，y 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線を表す。

双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{2}=1$ の焦点の座標は $(\sqrt{11},\ 0)$，$(-\sqrt{11},\ 0)$ であるから，双曲線①の焦点の座標は　　$(-8+\sqrt{11},\ 2)$，$(-8-\sqrt{11},\ 2)$

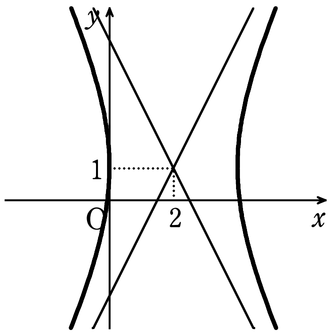
$\boxed{6}$ $4x^2-y^2-16x+2y-1=0$

$4(x^2-4x)-(y^2-2y)-1=0$

$4(x^2-4x+4)-(y^2-2y+1)=16$

$4(x-2)^2-(y-1)^2=16$

$\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$



よって，双曲線 $4x^2-y^2-16x+2y-1=0$ の中心の座標は　$(2,\ 1)$

双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$ の漸近線の方程式は　$y=2x$，$y=-2x$

求める漸近線の方程式は　$y=2(x-2)+1$，$y=-2(x-2)+1$

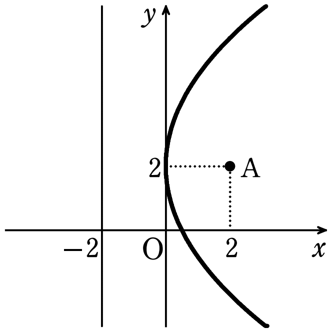
すなわち　　$y=2x-3$，$y=-2x+5$

$\boxed{7}$ (1) 焦点が $(2,\ 0)$，準線が $x=-2$ である放物線の方程式は　$y^2=4\cdot 2x$

すなわち　$y^2=8x$

焦点が A$(2,\ 2)$ である放物線は，放物線 $y^2=8x$ を y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線であるから，その方程式は

$$(y-2)^2=8x$$



(2) 線分 AB の中点を M とすると，M の座標は

$\left(\dfrac{8+0}{2},\ -1\right)$　すなわち　M$(4,\ -1)$

M が原点 O に移るように，

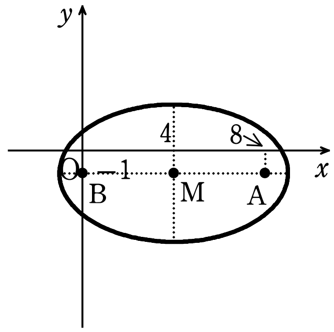
x 軸方向に -4，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると，

A$(8,\ -1)$，B$(0,\ -1)$ は，それぞれ点

F$(4,\ 0)$，F$'(-4,\ 0)$ に移る。

F，F$'$ を焦点とする楕円の方程式を

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$　とする。



焦点からの距離の和が 10 であるから　$2a=10$

よって　$a=5$

焦点の座標について　$\sqrt{a^2-b^2}=4$

両辺を 2 乗すると　$a^2-b^2=16$

よって　$b^2=a^2-16=25-16=9$

F，F$'$ を焦点とする楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

この楕円を x 軸方向に 4，y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，求める楕円の方程式は

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

(3) 線分 AB の中点を M とすると，M の座標は

$\left(\dfrac{6+(-4)}{2},\ 1\right)$　すなわち　M$(1,\ 1)$

M が原点 O に移るように，

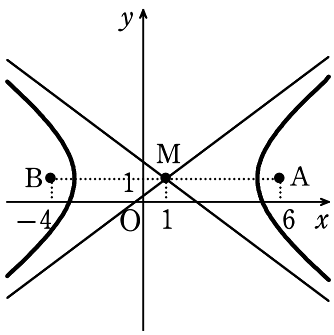
x 軸方向に -1，y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，

A$(6,\ 1)$，B$(-4,\ 1)$ は，それぞれ点 F$(5,\ 0)$，

F$'(-5,\ 0)$ に移る。

F，F$'$ を焦点とする双曲線の方程式を

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　とする。



焦点からの距離の差が 8 であるから　$2a=8$　よって　$a=4$

焦点の座標について　$\sqrt{a^2+b^2}=5$

両辺を 2 乗すると　$a^2+b^2=25$

よって　$b^2=25-a^2=25-16=9$

F，F′ を焦点とする双曲線の方程式は　$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

この双曲線を x 軸方向に 1，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると，求める双曲線の方程式は　$\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

$\boxed{8}$　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は

$x_1x-4y_1y=4$　……①

直線①が点 $(-2,\ 3)$ を通るから　$-2x_1-4\cdot3y_1=4$

すなわち　$x_1=-6y_1-2$　……②

また　$x_1{}^2-4y_1{}^2=4$

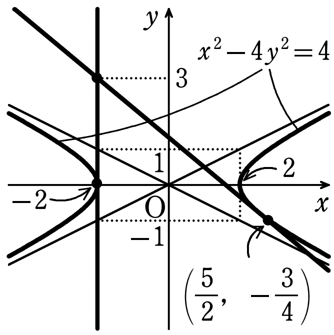
②を代入して整理すると　$4y_1{}^2+3y_1=0$

よって，$y_1(4y_1+3)=0$ から　$y_1=0,\ -\dfrac{3}{4}$

②から　$y_1=0$ のとき　$x_1=-2$

$y_1=-\dfrac{3}{4}$ のとき　$x_1=\dfrac{5}{2}$

ゆえに，①から　$x=-2,\ 5x+6y=8$



別解　双曲線 $x^2-4y^2=4$ の頂点の 1 つは $(-2,\ 0)$ であるから，点 $(-2,\ 3)$ を通り x 軸に垂直な直線 $x=-2$ は接線である。

もう 1 つの接線は，x 軸に垂直でないから，その方程式を $y-3=m(x+2)$ すなわち $y=mx+2m+3$ ……① とおく。①を双曲線の方程式 $x^2-4y^2=4$ ……② に代入すると　$x^2-4(mx+2m+3)^2=4$

整理すると　$(1-4m^2)x^2-8m(2m+3)x-8(2m^2+6m+5)=0$　……③

直線①が双曲線②に接するための条件は $1-4m^2\neq0$ で，このとき 2 次方程式③の判別式を D とすると　$D=0$

ゆえに　$\dfrac{D}{4}=\{-4m(2m+3)\}^2-(1-4m^2)\cdot\{-8(2m^2+6m+5)\}=0$

整理すると　$8(6m+5)=0$　　よって　$m=-\dfrac{5}{6}$

これは $1-4m^2\neq0$ を満たす。　ゆえに，①から　$5x+6y=8$

以上から　$x=-2,\ 5x+6y=8$

$\boxed{9}$　$y=2x+k$ ……①，$x^2+4y^2=4$ ……② とする。

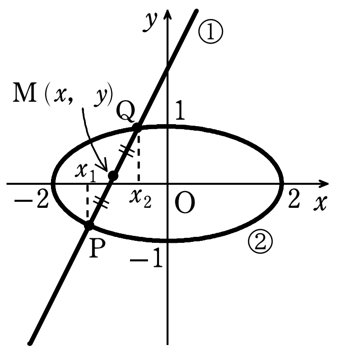
①を②に代入して整理すると　$17x^2+16kx+4(k^2-1)=0$　……③

(1)　x の 2 次方程式③の判別式を D とすると，異なる 2 点で交わるための条件は $D>0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(8k)^2-4\cdot17(k^2-1)=-4(k^2-17)$　　ゆえに　$-4(k^2-17)>0$

よって　$(k+\sqrt{17})(k-\sqrt{17})<0$　　したがって　$-\sqrt{17}<k<\sqrt{17}$

(2)　2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ x_1，x_2 とすると，x_1，x_2 は 2 次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係により　$x_1+x_2=-\dfrac{16k}{17}$



M$(x,\ y)$ とすると　$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{8k}{17}$　…… ④

このとき　$y=2x+k=2\cdot\left(-\dfrac{8k}{17}\right)+k=\dfrac{k}{17}$　…… ⑤

④ から　$k=-\dfrac{17}{8}x$

これを ⑤ に代入して　$y=-\dfrac{1}{8}x$

また，(1) から　$-\sqrt{17}<-\dfrac{17}{8}x<\sqrt{17}$　　よって　$-\dfrac{8\sqrt{17}}{17}<x<\dfrac{8\sqrt{17}}{17}$

したがって，求める軌跡は　直線 $y=-\dfrac{1}{8}x$ の $-\dfrac{8\sqrt{17}}{17}<x<\dfrac{8\sqrt{17}}{17}$ の部分

10 (1)　PF＋PF′ は楕円上の点 P から 2 つの焦点 F，F′ までの距離の和であるから

$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2\times5=10$$

(2)　P$(x,\ y)$，$x>0$，$y>0$ とする。$\mathrm{OP}^2=x^2+y^2=a^2$ であるから

$$\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF'}^2=(x-4)^2+y^2+(x+4)^2+y^2=2(x^2+y^2)+32=2a^2+32$$

また，$(\mathrm{PF}+\mathrm{PF'})^2=\mathrm{PF}^2+2\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}+\mathrm{PF'}^2$ であるから

$$2\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}=(\mathrm{PF}+\mathrm{PF'})^2-(\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF'}^2)=10^2-(2a^2+32)=68-2a^2$$

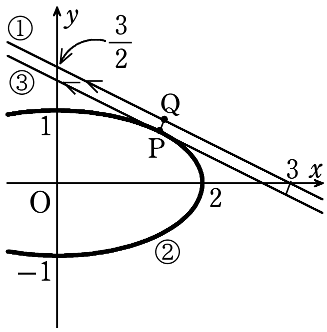
よって　$\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}=34-a^2$

(3)　△PFF′ において，余弦定理から　$\mathrm{FF'}^2=\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF'}^2-2\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}\cos\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに，(2) の結果と FF′＝8 から　$8^2=2a^2+32-2(34-a^2)\cdot\dfrac{1}{2}$

よって　$a^2=22$　　$a>0$ であるから　$a=\sqrt{22}$

11 求める距離 PQ の最小値は，直線 $x+2y=3$ …… ① と平行で，楕円 $x^2+4y^2=4$ …… ② に第 1 象限で接する直線 $x+2y+k=0$ …… ③ と直線 ① との距離に等しい。③ から　$2y=-x-k$



これを ② に代入して整理すると

$$2x^2+2kx+k^2-4=0$$

判別式を D とすると，直線 ③ が楕円 ② に接するための条件は　$D=0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=k^2-2(k^2-4)=-k^2+8$

ゆえに，$-k^2+8=0$ から　$k=\pm2\sqrt{2}$

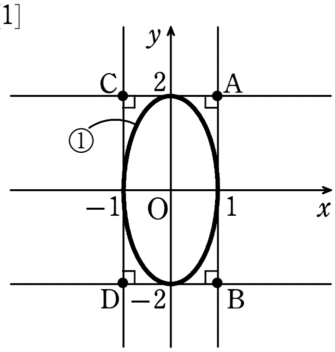
直線 ③ が楕円 ② に第 1 象限で接するとき，$k<0$ であるから　$k=-2\sqrt{2}$

よって，求める最小値は，直線 $x+2y-2\sqrt{2}=0$ と直線 ① 上の点 $(3,\ 0)$ との距離に等

しいから　　$\dfrac{|3+2\cdot 0-2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{5}$

12 $4x^2+y^2=4$　…… ①　とおく。

[1]　$a=\pm 1$ のとき，2 本の接線が直交するのは，点 A$(1,\ 2)$，B$(1,\ -2)$，C$(-1,\ 2)$，D$(-1,\ -2)$ からそれぞれ引いたときである。すなわち，4 点 A，B，C，D は求める軌跡の一部である。

[1]


[2]　$a \fallingdotseq \pm 1$ のとき，点 P を通る直線の方程式を

$$y-b=m(x-a)$$

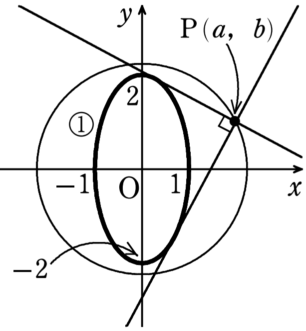
すなわち　$y=mx+b-ma$　…… ②　とおく。

② を ① に代入して整理すると

$$(4+m^2)x^2+2m(b-ma)x+(b-ma)^2-4=0 \quad \cdots\cdots ③$$

直線 ② が楕円 ① に接するとき，x の 2 次方程式 ③ の判別式を D とすると

$$D=0$$

[2]


ゆえに　　$\dfrac{D}{4}=m^2(b-ma)^2-(4+m^2)\cdot\{(b-ma)^2-4\}=0$

よって　　$4\{-(b-ma)^2+4+m^2\}=0$

すなわち　　$(1-a^2)m^2+2abm-b^2+4=0$　…… ④

$1-a^2 \fallingdotseq 0$ であるから，m の 2 次方程式 ④ の 2 つの解を m_1，m_2 とすると，点 P から楕円 ① に引いた 2 本の接線の傾きは m_1，m_2 で与えられる。

2 本の接線が直交するための条件は　　$m_1m_2=-1$

④ において，解と係数の関係から　　$m_1m_2=\dfrac{-b^2+4}{1-a^2}$

よって　　$\dfrac{-b^2+4}{1-a^2}=-1$　　　ゆえに　　$a^2+b^2=5$，$a \fallingdotseq \pm 1$

ここで，4 点 A，B，C，D は円 $x^2+y^2=5$ に含まれる。

すなわち，点 P は円 $x^2+y^2=5$ 上にある。

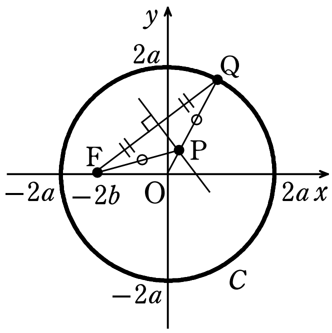
逆に，この円上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　円 $x^2+y^2=5$

$\boxed{13}$ 点 P は線分 FQ の垂直二等分線上にあるから

$$\mathrm{FP}=\mathrm{QP}$$

ゆえに　$\mathrm{FP}+\mathrm{PO}=\mathrm{QP}+\mathrm{PO}=\mathrm{QO}=2a$



よって，線分の長さの和 FP＋PO は点 Q の位置には無関係に一定 $(2a)$ である。

したがって，2 点 F，O から点 P までの距離の和が $2a$ (一定) であるから，点 P の軌跡は F，O を焦点とする楕円である。この楕円の中心は線分 FO の中点 $(-b,\ 0)$ で，長軸の長さは 2 焦点からの距離の和 $2a$ に等しい。

さらに，短軸の長さを $2c$ とおくと，焦点間の距離は $2\sqrt{a^2-c^2}$ で，これは $2b$ に等しいから　$\sqrt{a^2-c^2}=b$　　よって　$c^2=a^2-b^2$

以上から，点 P の軌跡の方程式は　$\dfrac{(x+b)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-b^2}=1$

$\boxed{14}$ $\sqrt{16+9}=5$ であるから　$\mathrm{F}(5,\ 0)$

双曲線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

P から直線 $x=k$ に下ろした垂線を PH とすると，次の等式が成り立つ。

$$\mathrm{PF}:\mathrm{PH}=e:1$$

よって　$\sqrt{(x-5)^2+y^2}:|x-k|=e:1$

したがって　$\sqrt{(x-5)^2+y^2}=e|x-k|$

両辺を 2 乗すると　$(x-5)^2+y^2=e^2(x-k)^2$　……①

ここで，$\mathrm{P}(x,\ y)$ は双曲線上の点であるから　$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

よって　$y^2=9\left(\dfrac{x^2}{16}-1\right)$

これを ① に代入すると　$(x-5)^2+9\left(\dfrac{x^2}{16}-1\right)=e^2(x-k)^2$

x について整理すると　$(16e^2-25)x^2-32(e^2k-5)x+16(e^2k^2-16)=0$

この等式は，双曲線上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について成り立つ，すなわち $x\leqq -4$，$4\leqq x$ であるすべての実数 x について成り立つから

$$\begin{cases} 16e^2-25=0 & \cdots\cdots ② \\ e^2k-5=0 & \cdots\cdots ③ \\ e^2k^2-16=0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

② から　$e^2=\dfrac{25}{16}$　　$e>0$ から　$e=\dfrac{5}{4}$

これを ③ に代入して k を求めると　$k=\dfrac{16}{5}$　　これらは ④ も満たす。

したがって　$k=\dfrac{16}{5}$，$e=\dfrac{5}{4}$