8/12

【例題 15】　$xy+2x-y-4=0$ を満たす整数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。

$(x\qquad)(y\qquad)$と置

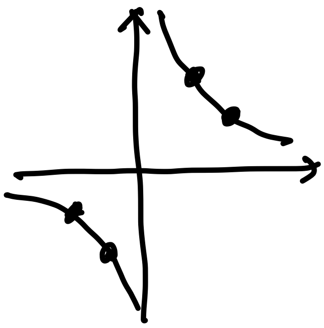
$$(x-1)(y+2)=\underbrace{4-2}_{2}$$

-2

検　$(x-1)(y+2)=2$

$\boxed{xy=2}$ が平行移動したもの

x方向に$+1$，y方向に-2



【例題 16】 整数 x, y が $29x-7y=1$ を満たすとき，x, y の値をすべて求めよ

直線

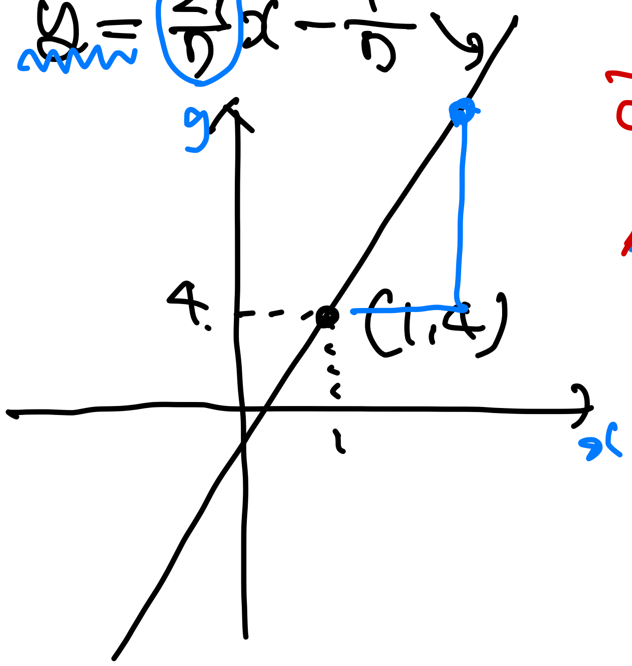
$(x, y)=(1, 4)$ ← 通る点

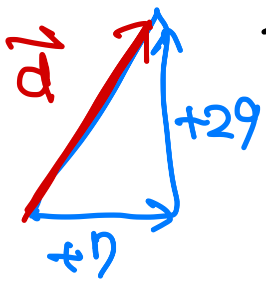
答 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}7\\29\end{pmatrix}$ 　 k: 整数

方向v.

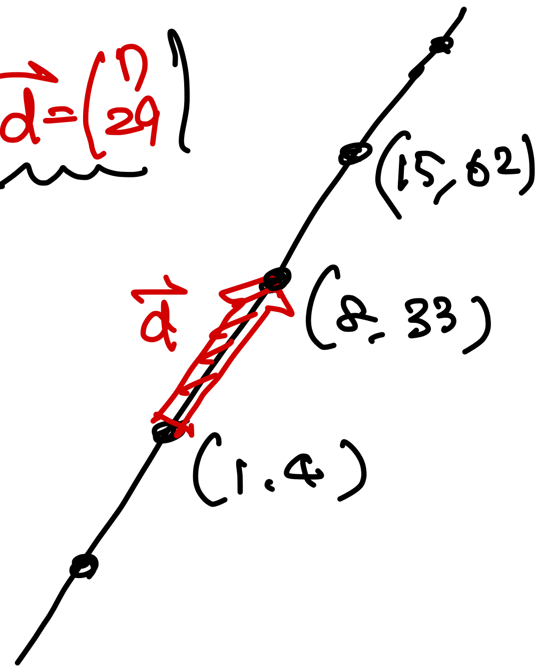
傾き

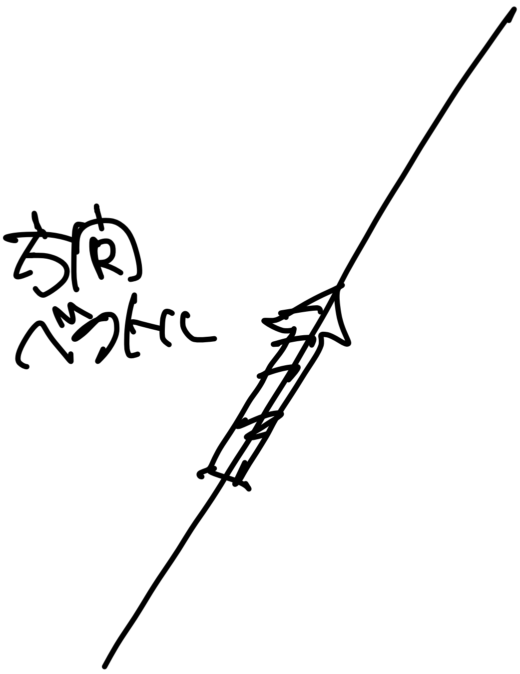
$y=\frac{29}{7}x-\frac{1}{7}$





$\vec{d}=\begin{pmatrix}7\\29\end{pmatrix}$





【例題 18】　自然数 m, n が $m^2 - 2mn + 3n^2 = 12$ を満たすとき，m, n の値を求めよ。

整×整＝整 が基本　　左辺を~~因数分解~~.

× $(m+n)(m-3n)=12$　　展開して検算

因数分解できない（2次式）$\Longrightarrow$ 解の公式 （平方完成）

$$m^2 - 2n\cdot m + (3n^2 - 12) = 0$$

$$(m-n)^2 = 12 - 2n^2$$

$$m - n = \pm\sqrt{〃}$$

$$m = n \pm \sqrt{n^2 - (3n^2 - 12)}$$

$$m = n \pm \sqrt{12 - 2n^2}$$

具体化

$\sqrt{}$ 内

$n = 1, 2, 3 \cdots$

× $n=1$　10

$n=2$　4

$n=3$　-6

$n=4$　-20

以降：$(-)$

$\sqrt{}$ 内 $\geqq 0$ より

$12 - 2n^2 \geqq 0$

$n^2 \leqq 6$

$n = 1, 2$ が必要
×　○

判別式 $\geqq 0$ 2′
参考

$(m, n) = (\square, 2)$
0 or 4

$\sqrt{}$ 内は平方数

$12 - 2n^2 = k^2$
（$k \geqq 0$ の整数）

$n=2$ のみ適す

㊟

【例題 19】 関係式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ $(x \leqq y \leqq z)$ を満たす自然数の組 (x, y, z) の組をすべて求めよ。

$\boxed{\frac{1}{x}} \geqq \frac{1}{y} \geqq \boxed{\frac{1}{z}}$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$

$1 \leqq \frac{3}{x}$

$x \leqq 3$ 絞れた。

$x=1, 2, 3$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqq \frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}$

$1 \geqq \frac{3}{z}$

$z \geqq 3$ ×

絞れない

$x=1$ のとき ㊟ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ より不適

$x \leqq y \leqq z$
$\quad \shortparallel$
$\quad 2$

$x=2$ のとき ㊟ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

(y について 2 次 絞る)

$\times 2yz$

$2z+2y=yz$

$(y-2)(z-2)=4$

$y-2$	2	1
$z-2$	2	4

$(x, y, z)=(2, 4, 4)\ (2, 3, 6)$

$x=3$ のとき ㊟ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$

- y について 2 次 絞る
- $\times 3yz$ として 整×整＝整
- $\boxed{\text{不等式立てて絞る}}$

$(x, y, z)=(3, 3, 3)$

【例題 20】　n を整数とする。n^2+1 が $3n+1$ の倍数になる n を求めよ。

$k=\dfrac{n^2+1}{3n+1}$ ⟹ $\dfrac{2次}{1次}$ なので ありえん

【例題 21】　$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

Hint $\sqrt{3}$ は 無理数 の代表例

有

☆ 参考

a, b: 有理数 のとき

$a+b\sqrt{3}=0 \Longrightarrow a=b=0$

(1) 公式の空らんをうめよ

(2) それを証明せよ。 背理法で

($b \neq 0$ と仮定

$\sqrt{3}=-\dfrac{a}{b}$)

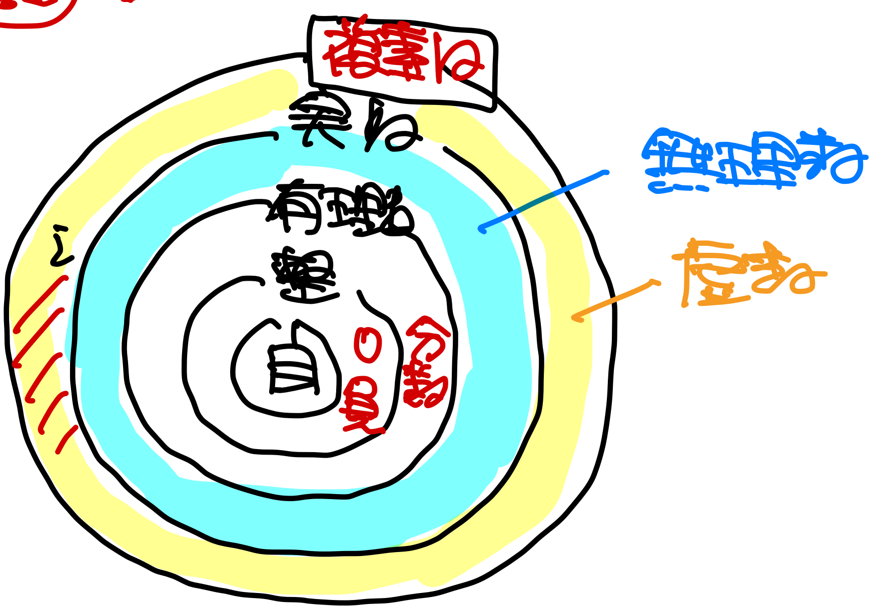
i: 虚数単位

類題

a, b: 実数 のとき

$a+bi=0 \Longrightarrow a=b=0$

証 $b \neq 0$ と仮定 $i=-\dfrac{a}{b}$



10 (3)

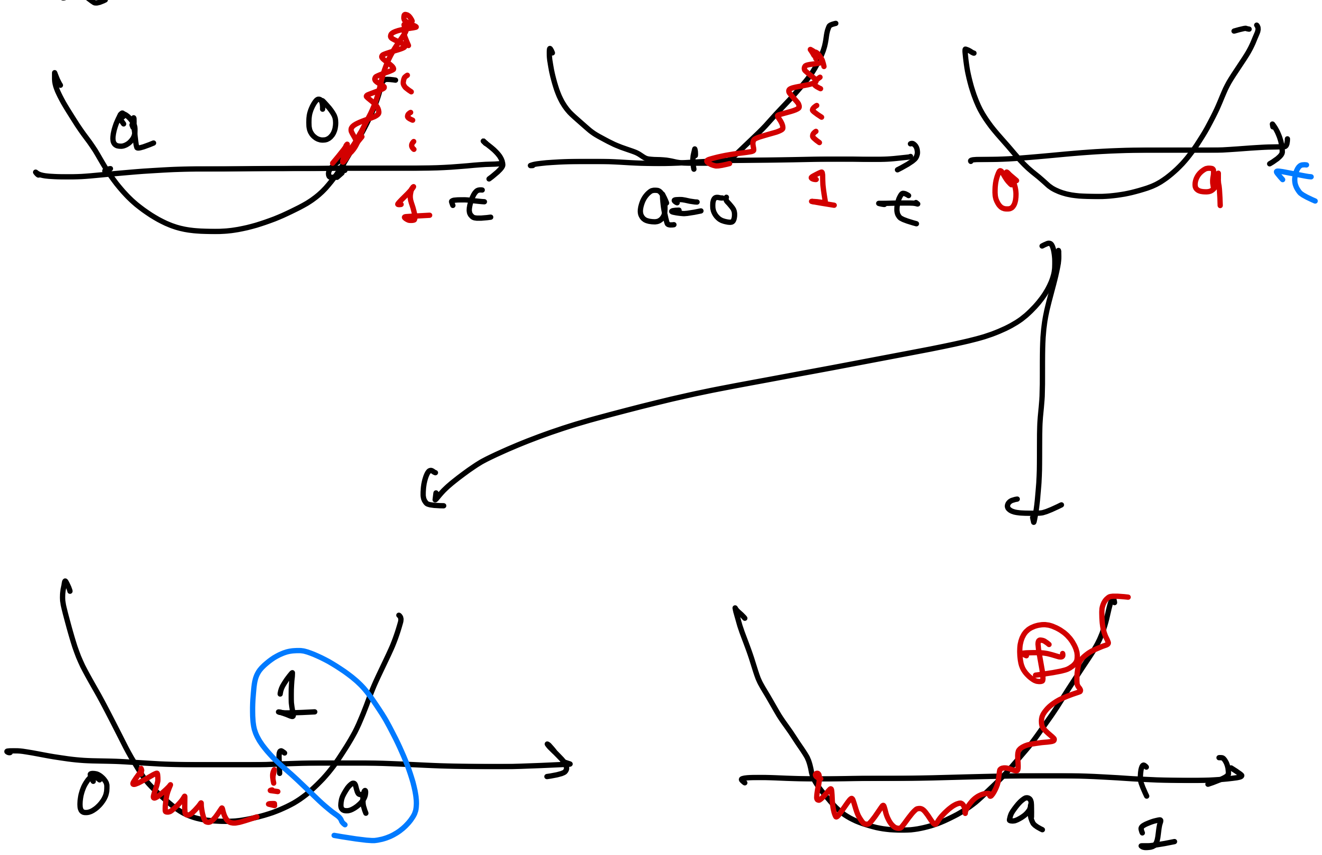
$\underbrace{\boxed{\sin^2 x}}_{1-\cos^2 x} + a\cos x \geq 1$ for all x $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$t = \cos x$ とおくと

$\cancel{1} - t^2 + at \geq \cancel{1}$ for all t $(0 \leq t \leq 1)$

$t^2 - at \leq 0$ //

× $a < 0$ 不適 $a = 0$ 不適 $a > 0$



成立 不成立

$1 \leq a$

例1

「$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ を満たすすべてのxについて、

$\underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} + a\cos x \geqq \cancel{1}$ が成立

then. aの条件を求めよ $\left(a \geqq \boxed{?}\right)$

$\cos x(\cos x - a) \leqq 0$

ゼロ割りキケン

~~$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$~~ ~~$\cos x \leqq a$~~ ~~$= \frac{1}{2}$~~

$a \geqq 0$のとき

$0 \leqq \cos x \leqq a$　$\boxed{大}$　小⊂大

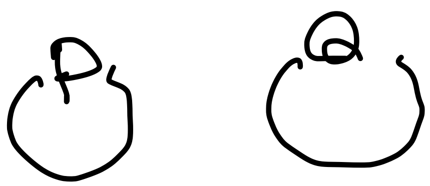
これが $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で常に成立する条件を考える

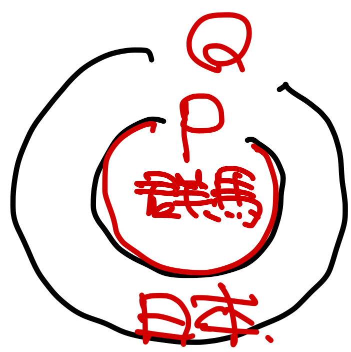
↓

$0 \leqq \cos x \leqq 1$　ならばが真のとき　$\boxed{小}$　小⊂大

条件　条件

P ならば Q が真のとき





$a \geqq 1$

$\boxed{12}$

$_8C_3$

「A, B, C $\xleftrightarrow{\text{対応}}$ $\boxed{AB}$ $\boxed{AC}$ $\boxed{BC}$」 $\times$ ($_8C_3$倍)

$\underbrace{\boxed{AB}\ \boxed{AC}\ \boxed{BC}}_{3本}$

$$\frac{_8C_3}{_{28}C_3} = \frac{\cancel{\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}}}{\cancel{\frac{28\cdot 27\cdot 26}{3\cdot 2\cdot 1}}}$$

$$= \frac{\cancel{2^3}^{\,2} \times \cancel{7} \times \cancel{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{7}\times\cancel{4}\times \cancel{3^3}^{\,3^2} \times \cancel{2}\cdot 13} = \frac{2}{117}$$

$$\frac{2}{3^2\times 13}$$

$\boxed{例}$ A B C D E F $\rightleftarrows$ $\boxed{AB}$ $\boxed{CD}$ $\boxed{EF}$

● 数え上げ OR 計算

$$\boxed{\frac{_8C_6 \times \overset{15}{\boxed{?}}}{_{28}C_3}}$$

$$= \frac{5}{39}$$

異なる6人を2人ずつ3組に分ける

$$\frac{_6C_2 \times {_4C_2} \times {_2C_2}}{3!} = \boxed{15}$$