8/19

- 試練 1回以上
- 数I 2回ぐらい
- 地理 2回ぐらい

②③
何時??

日本

数と式 ②

比例式

$$\frac{●}{○} = \frac{▲}{△} = \frac{■}{□} = k \text{ とおく}$$

例題 11 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4} \neq 0$ のとき，$\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}$ の値を求めよ。

$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|} \geqq 0$

$= \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$

二重根号

（1） $\sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

（2） $\sqrt{(a+b) - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ （ただし $a > b$ とする）

【証明】 $\sqrt{}$ 内は $(\quad)^2$ を作りたい

$\sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 \pm 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

例題 12 次の式を簡単にせよ。

（1） $\sqrt{5 - \sqrt{24}}$　　（2） $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$

$\boxed{6}$ 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$ 検

和　積

$= \sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}$

別

同様

(2) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}$

$= \sqrt{3(5-2\sqrt{6})}$

和　積

$= \sqrt{3}\cdot\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$= \underline{3-\sqrt{6}}$

答

略

(3) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

2がない

$(\alpha-\beta)$

$\alpha+\beta$

対称式

求業な

14 ＊ 相異なる実数 α，β が $\begin{cases} \alpha^2+\sqrt{3}\beta=\sqrt{6} & \text{①} \\ \beta^2+\sqrt{3}\alpha=\sqrt{6} & \text{②} \end{cases}$ を満たすとき，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。

和と積

①②は2次式で扱いづらい

①②はαとβを入れかえた式

①＋②より $\alpha^2+\beta^2+\sqrt{3}(\alpha+\beta)=2\sqrt{6}$ ――③

①×②より $(\alpha^2+\sqrt{3}\beta)(\beta^2+\sqrt{3}\alpha)=6$

$\alpha^2\beta^2+\sqrt{3}\alpha\beta(\alpha+\beta)+3\alpha\beta=6$

$(\alpha\beta)^2+\alpha\beta\times\{2\sqrt{6}-(\alpha^2+\beta^2)\}+3\alpha\beta=6$

$(\alpha\beta)^2+2\sqrt{6}\alpha\beta-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+3\alpha\beta=6$ ――(＊)

次数が上がってしまった

$s=\alpha\beta$，$t=\alpha+\beta$ とおくと

③：$t^2-2s+\sqrt{3}t=2\sqrt{6}$

(＊)：$t^2+2\sqrt{6}t-s(t^2-2s)+3t=6$

① $-$ ② $\quad \alpha^2-\beta^2+\sqrt{3}(\beta-\alpha)=0$

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-\sqrt{3}(\alpha-\beta)=0$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\sqrt{3})=0$$

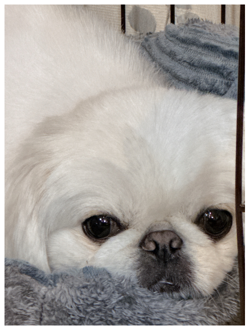
$\alpha\neq\beta$ より $\qquad \alpha+\beta=\sqrt{3}$

$\vdots$

$\boxed{16}$

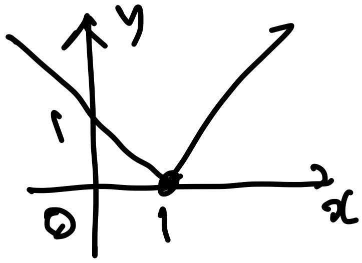
(2) $||x-1|-2|-3=0$

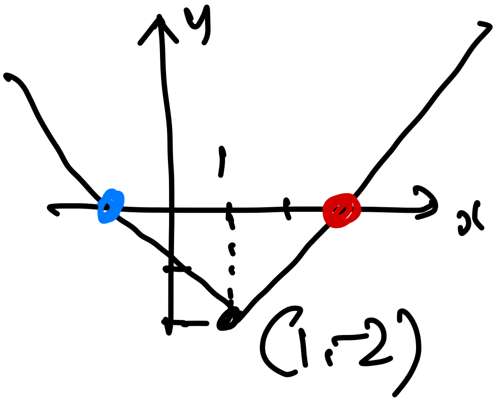
$$\overbrace{||x-1|-2|}^{y} = \overbrace{3}^{y}$$



左辺のグラフを描くと

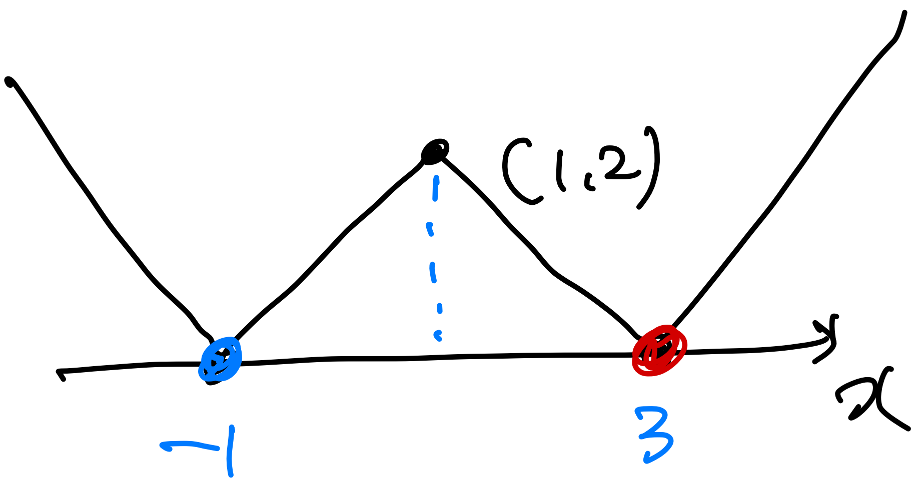
$y=|x-1|$ ⟶ $y=|x-1|-2$

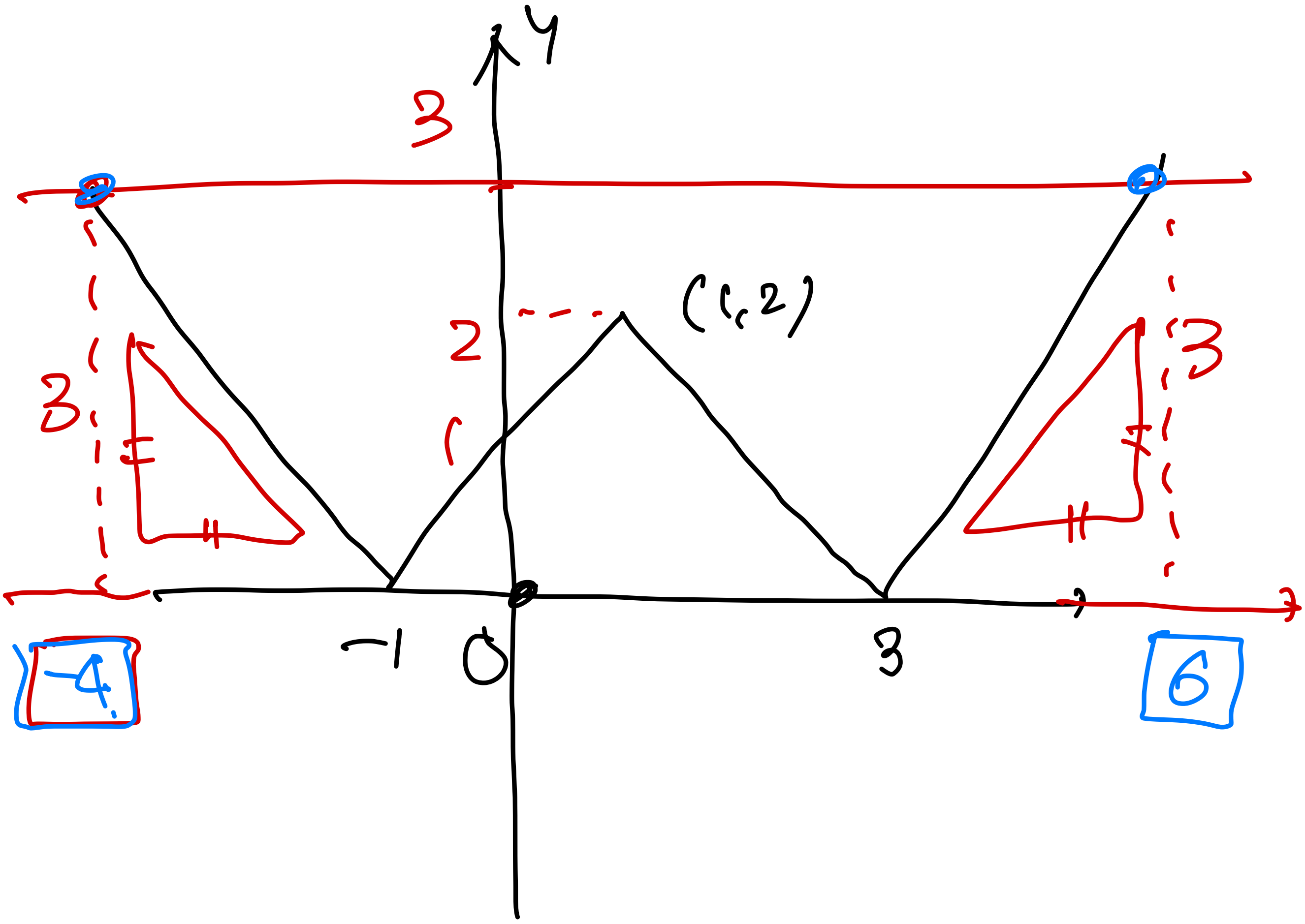




$y \leqq 0$ 部分, 折り返し

↳ $y=||x-1|-2|$



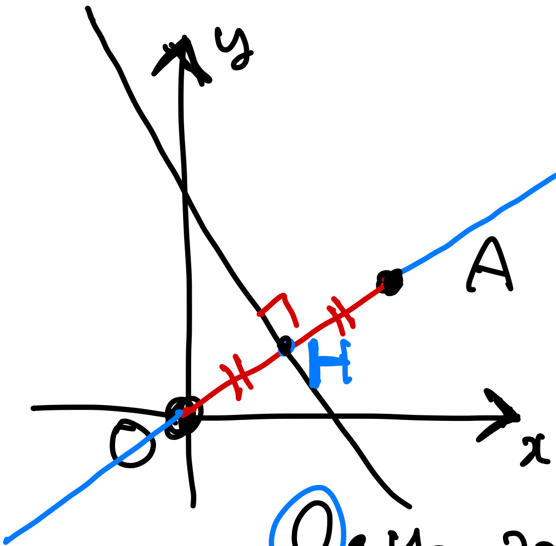

y
3
2
1
(1, 2)
3
3
3
-1
0
3
-4
6

【１６】2015 金沢医科大学 1/22, 一般（１次）医

方程式 $y=2x^2$ で表される放物線 G_1 がある。c を正の実数とする。方程式 $y=-2x+c$ で表される直線 l に関して，原点 O(0, 0) と対称な点を A とする。A を頂点とし，G_1 を平行移動して得られる放物線を G_2 とする。G_1 と G_2 の交点を P とすると，P の x 座標は c を用いて $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}c+\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ と表すことができる。したがって，P と A が一致するとき，$c=\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

線対称 ⇒ 垂直 & 二等分

OAの垂直二等分線がℓ



m: $\boxed{y=\frac{1}{2}x}$

ℓ: $y=-2x+c$

ℓ, mの交点がH ⇒ 解く

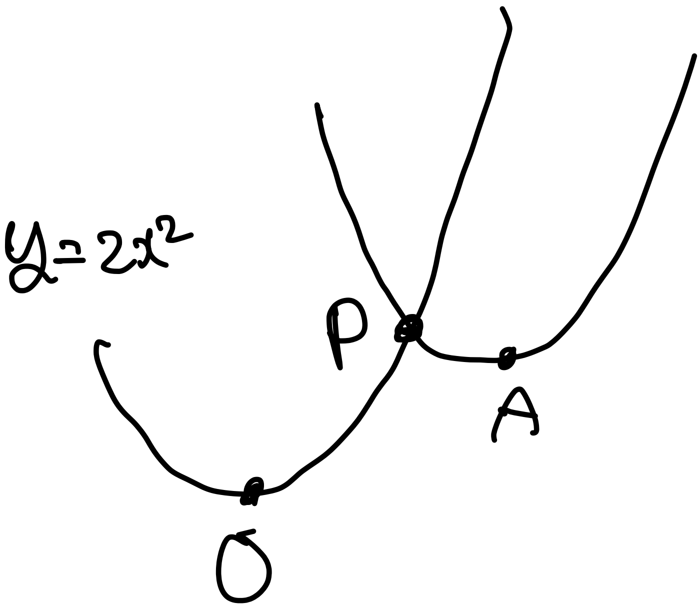
$\frac{1}{2}x=-2x+c$

$\frac{5}{2}x=c \quad \therefore x=\frac{2c}{5}$

$H\left(\frac{2c}{5}, \frac{c}{5}\right)$

よって $A\left(\frac{4c}{5}, \frac{2c}{5}\right)$

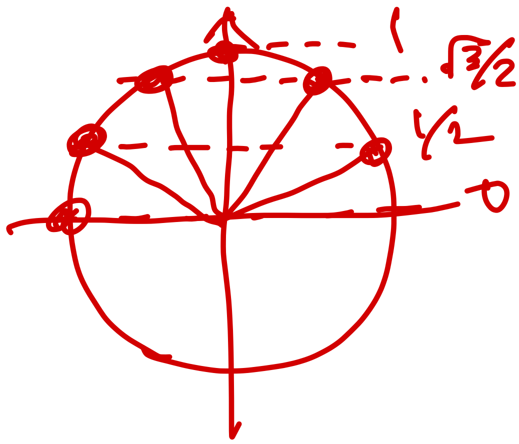
$y=2\left(x-\frac{4c}{5}\right)^2+\frac{2c}{5}$

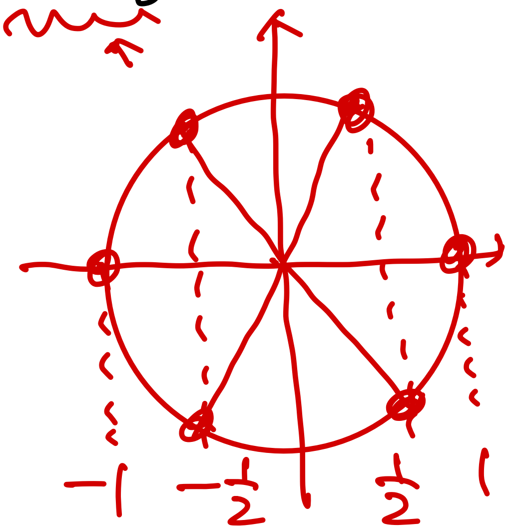


全ざわ場確

$\boxed{1}$ $T = \sin\frac{\pi a}{6} + b \times \cos\frac{\pi c}{3}$

$b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$





(1)

$$T_{max} = \boxed{1} + \boxed{6} \times \boxed{1} = 7$$

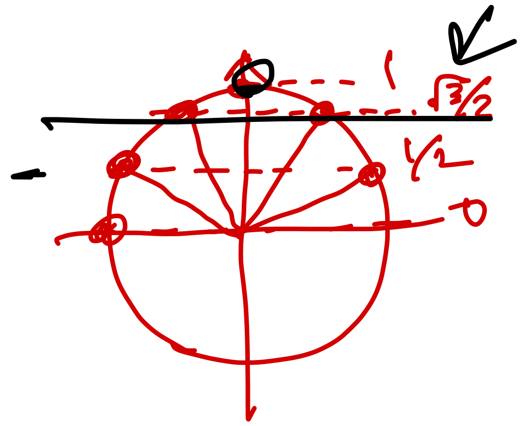
同様に

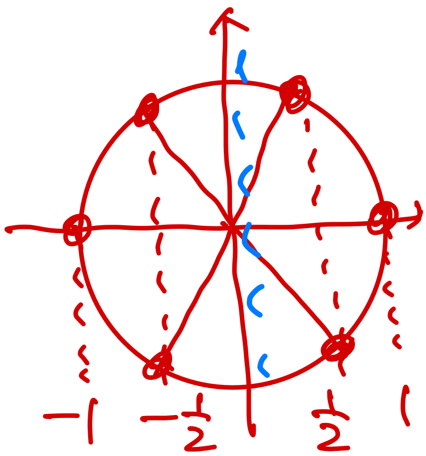
$$T_{min} = -6$$

---

(2) $T = \sin\frac{\pi a}{6} + b \times \cos\frac{\pi c}{3}$

$1, 2, 3, 4, 5, 6$





[解1] まず b固定

b=1のとき $T = \sin\frac{\pi a}{6} + \cos\frac{\pi c}{3}$ 4通り

(i) $\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{a:\,2通り} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{c:\,2通り}\right)$

(ii) $\left(\underbrace{1}_{1通り} + \underbrace{(-1)}_{1通り}\right)$ 1通り

b=2のとき $T = \sin\frac{\pi a}{6} + 2\cos\frac{\pi c}{3}$

$1 + 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$ 2通り!

~~b=3, 4, 5, 6~~ ~~$T = \sin\frac{\pi a}{6} + \boxed{3}\cos\frac{\pi c}{3}$~~

~~$0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$~~

~~4, 5, 6~~

~~$\pm\left(1, \frac{1}{2}\right)$~~

全2check

0通り

$$\frac{4+1+2}{6^3} = \frac{7}{216}$$

[解2] まず a 固定

(i) a=3 のとき

1通り

$$T = 1 + \boxed{b}\cdot\cos\frac{\pi c}{3}$$

$1\sim6$

$\pm\left(1, \frac{1}{2}\right)$

$\left(b=1,\ \cos=-1\right)$ 1通り

$\left(b=2,\ \cos=-\frac{1}{2}\right)$ 2通り

(ii) a=2,4 のとき $\sqrt{3}$ が出る

(iv) a=6 のとき 不適 $T=6\cdot\cos \neq 0$

~~(iii) a=1,5 のとき~~

2通り

$$T = \frac{1}{2} + \boxed{b}\cdot\cos\frac{\pi c}{3}$$

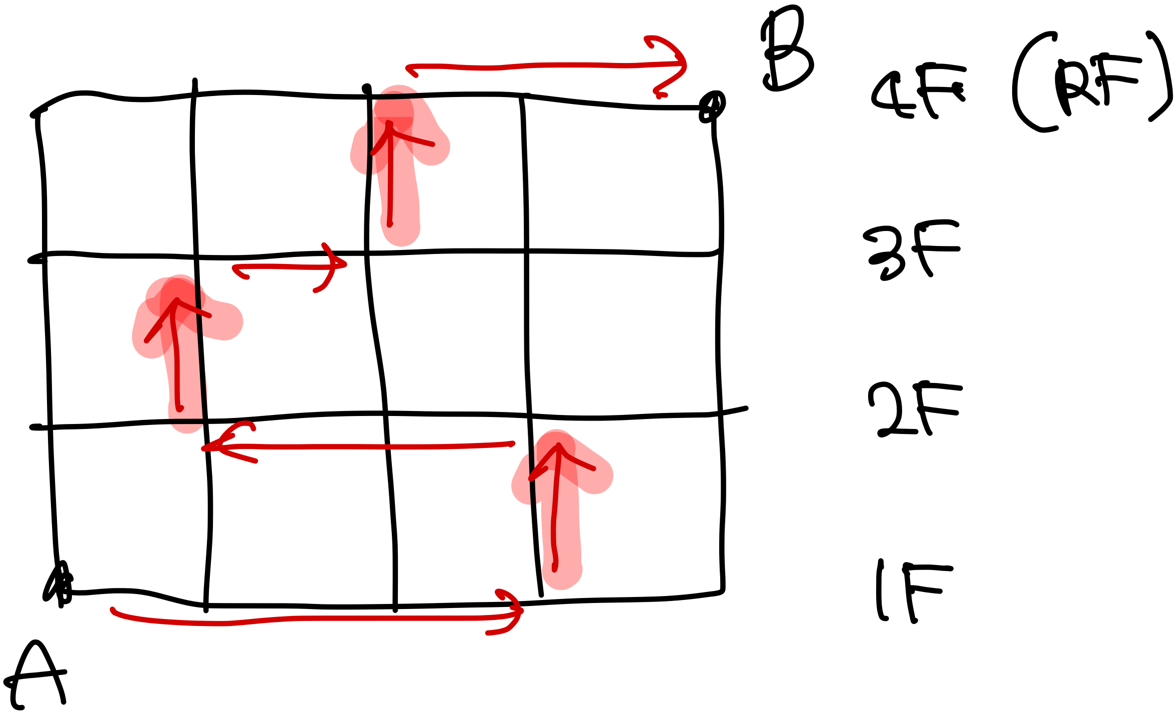
$1\sim6$

$\pm\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$b=1,\ \cos=-\frac{1}{2}$

2通り

2×2=4通り



(1) 最短経路 $\dfrac{7!}{4!\,3!} = {}_7C_3 = 35$ 通り

→ ↑

(2) → ← ↑ のみで AからB

$\boxed{5^3}$ 通り

BASIC問題

1 次の２次方程式を解け。

(1) $6x^2-5x-6=0$　(2) $2x^2-6x+3=0$

2 次の不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 4x+1<3x-1 \\ 2x-1 \geqq 5x+6 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+3>x+2 \\ 3x>4x+2 \end{cases}$

(3) $2(x-3)+5<5x-6 \leqq \dfrac{3x+4}{3}$

3 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x-1|=2$　(2) $|x+4|<5$　(3) $|2x-3| \geqq 4$

4 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{27}}-\dfrac{1}{\sqrt{12}}$

5 実数 x，y が $x+y=3$，$xy=-2$ を満たすとき，x^2+y^2，x^3+y^3，x^5+y^5 の値を求めよ

6 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$　(2) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}$　(3) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

STANDARD問題

7 a を定数とするとき，次の不等式を解け。

(1) $ax \leqq 1$　(2) $ax+6>3x+2a$

8 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3-a^2c-ab^2+b^2c$　(2) $2x^2+3xy-2y^2+x+7y-3$

9 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x-3|=2x$　(2) $|x-3|<2x$　(3) $|x|+|x-2|=6$

10 $\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ の分母を有理化せよ。

11 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$，$x^4+\dfrac{1}{x^4}$，$x^6+\dfrac{1}{x^6}$ の値を求めよ。

実戦問題篇

12 a を定数とするとき，次の方程式を解け。

(1) $ax^2+(a^2-1)x-a=0$　(2) $a^2x+1=a(x+1)$

13 ＊　$2^{18}-1$ を素数の積で表したとき，そこに現れる素数の中で最大なものを求めよ。

14 ＊　相異なる実数 α，β が $\begin{cases} \alpha^2+\sqrt{3}\beta=\sqrt{6} \\ \beta^2+\sqrt{3}\alpha=\sqrt{6} \end{cases}$ を満たすとき，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。

15 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数の部分を a，小数の部分を b とする。

(1) a と b を求めよ。

(2) $a+2b+b^2+1$ の値を求めよ。

16 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x+2|-|x-1|>x$　　(2) $||x-1|-2|-3=0$

17 x の連立不等式 $\begin{cases} 7x-5>13-2x \\ x+a\geqq 3x+5 \end{cases}$ を満たす整数 x がちょうど 5 個存在するとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答 (1) $x=\frac{3}{2},\ -\frac{2}{3}$ (2) $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{2}$ 解答 (1) $x\leqq -\frac{7}{3}$ (2) 解はない (3) $\frac{5}{3}<x\leqq\frac{11}{6}$

$\boxed{3}$ 解答 (1) $x=3,\ -1$ (2) $-9<x<1$ (3) $x\leqq -\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\leqq x$

$\boxed{4}$ 解答 (1) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{5\sqrt{3}}{18}$

$\boxed{5}$ 解答 $x^2+y^2=13,\ x^3+y^3=45,\ x^5+y^5=573$

$\boxed{6}$ 解答 (1) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ (2) $3-\sqrt{6}$ (3) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $a>0$ のとき $x\leqq\frac{1}{a}$

$a=0$ のとき すべての実数

$a<0$ のとき $x\geqq\frac{1}{a}$

(2) $a>3$ のとき $x>2$

$a=3$ のとき 解はない

$a<3$ のとき $x<2$

$\boxed{8}$ 解答 (1) $(a+b)(a-b)(a-c)$ (2) $(x+2y-1)(2x-y+3)$

$\boxed{9}$ 解答 (1) $x=1$ (2) $x>1$ (3) $x=-2,\ 4$

$\boxed{10}$ 解答 $\frac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}$

$\boxed{11}$ 解答 $x^2+\frac{1}{x^2}=10,\ x^4+\frac{1}{x^4}=98,\ x^6+\frac{1}{x^6}=970$

$\boxed{12}$ 解答 (1) $a\fallingdotseq 0$ のとき $x=-a,\ \frac{1}{a}$

$a=0$ のとき $x=0$

(2) $a\fallingdotseq 0,\ a\fallingdotseq 1$ のとき $x=\frac{1}{a}$

$a=0$ のとき 解はない

$a=1$ のとき すべての実数

$\boxed{13}$ 解答 73

$\boxed{14}$ 解答 順に，$\sqrt{3}$，$3-\sqrt{6}$，$1+\sqrt{6}$

$\boxed{15}$ 解答 (1) $a=3,\ b=\sqrt{3}-1$ (2) 6

$\boxed{16}$ 解答 (1) $x<-3,\ -1<x<3$ (2) $x=6,\ -4$

$\boxed{17}$ 解答 $19\leqq a<21$

1 (1) 左辺を因数分解すると　$(2x-3)(3x+2)=0$

$\begin{array}{cccc} 2 & \diagdown\!\!\!\diagup & -3 \longrightarrow & -9 \\ 3 & & 2 \longrightarrow & 4 \\ \hline 6 & & -6 & -5 \end{array}$

よって　$2x-3=0$　または　$3x+2=0$

したがって　$x=\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{2}{3}$

(2) 解の公式により　$x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}$

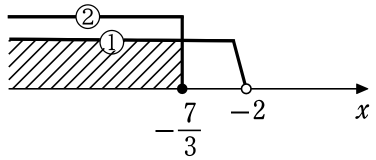
$=\dfrac{6\pm\sqrt{12}}{4}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

別解　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\cdot3}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

2 (1) $4x+1<3x-1$ から　$x<-2$　……①

$2x-1\geqq5x+6$ から　$-3x\geqq7$

よって　$x\leqq-\dfrac{7}{3}$　……②

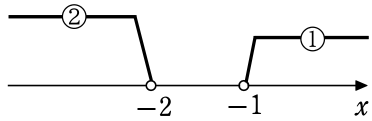


①と②の共通範囲を求めて　$x\leqq-\dfrac{7}{3}$

(2) $2x+3>x+2$ から　$x>-1$　……①

$3x>4x+2$ から　$-x>2$

よって　$x<-2$　……②



①と②の共通範囲はないから，この連立不等式の解はない。

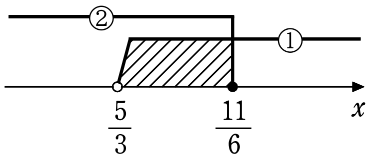
(3) $2(x-3)+5<5x-6$ から　$-3x<-5$

よって　$x>\dfrac{5}{3}$　……①

$5x-6\leqq\dfrac{3x+4}{3}$ から　$15x-18\leqq3x+4$

よって　$12x\leqq22$

ゆえに　$x\leqq\dfrac{11}{6}$　……②



①と②の共通範囲を求めて　$\dfrac{5}{3}<x\leqq\dfrac{11}{6}$

3 (1) $|x-1|=2$ から　$x-1=\pm2$　　よって　$x=3,\ -1$

(2) $|x+4|<5$ から　$-5<x+4<5$

各辺から4を引いて　$-9<x<1$

(3) $|2x-3|\geqq4$ から　$2x-3\leqq-4$ または $4\leqq2x-3$

よって　$2x\leqq-1$ または $7\leqq2x$　　ゆえに　$x\leqq-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}\leqq x$

4 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{27}}-\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}\right)\sqrt{3}$$

$$=\left(\frac{6}{18}+\frac{2}{18}-\frac{3}{18}\right)\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{18}$$

$\boxed{5}$ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot(-2)=13$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=3^3-3\cdot(-2)\cdot 3=45$

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(x^2y^3+x^3y^2)=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)$

$=13\cdot 45-(-2)^2\cdot 3=573$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}=3\{13-(-2)\}=45$

$\boxed{6}$ (1) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{(7+2)-2\sqrt{7\cdot 2}}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}=\sqrt{15-2\sqrt{54}}=\sqrt{(9+6)-2\sqrt{9\cdot 6}}$

$=\sqrt{9}-\sqrt{6}=3-\sqrt{6}$

(3) $$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(5+1)-2\sqrt{5\cdot 1}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{7}$ (1) [1]　$a>0$ のとき

両辺を正の数 a で割って　$x\leqq\frac{1}{a}$

[2]　$a=0$ のとき

与えられた不等式 $0\cdot x\leqq 1$ の解は

すべての実数

[3]　$a<0$ のとき

両辺を負の数 a で割って　$x \geqq \dfrac{1}{a}$

(2)　不等式を整理すると

$$(a-3)x > 2(a-3) \quad \cdots\cdots ①$$

[1]　$a-3>0$ すなわち $a>3$ のとき

両辺を正の数 $a-3$ で割って　$x > \dfrac{2(a-3)}{a-3}$

すなわち　　$x>2$

[2]　$a-3=0$ すなわち $a=3$ のとき

不等式 ① は解がない。

[3]　$a-3<0$ すなわち $a<3$ のとき

両辺を負の数 $a-3$ で割って　$x < \dfrac{2(a-3)}{a-3}$

すなわち　　$x<2$

$\boxed{8}$ (1)　与式 $=(-a^2+b^2)c+a(a^2-b^2)$

$$=(a^2-b^2)(a-c)$$

$$=(a+b)(a-b)(a-c)$$

(2)　与式 $=2x^2+(3y+1)x-(2y^2-7y+3)$

$$=2x^2+(3y+1)x-(y-3)(2y-1)$$

$$=\{x+(2y-1)\}\{2x-(y-3)\}$$

$$=(x+2y-1)(2x-y+3)$$

$$\begin{array}{lll} 1 & 2y-1 & \longrightarrow \ 4y-2 \\ 2 & -(y-3) & \longrightarrow \ -y+3 \\ \hline 2 & -(y-3)(2y-1) & \quad 3y+1 \end{array}$$

$\boxed{9}$ (1)　[1]　$x-3 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 3$ のとき

$|x-3|=x-3$ であるから，方程式は　　$x-3=2x$

これを解くと　$x=-3$　　　　これは $x \geqq 3$ を満たさない。

[2]　$x-3<0$ すなわち $x<3$ のとき

$|x-3|=-(x-3)$ であるから，方程式は　　$-(x-3)=2x$

これを解くと　$x=1$　　　　これは $x<3$ を満たす。

[1]，[2] から，求める解は　$x=1$

参考　$|A|=B$ は「$A=\pm B$ かつ $B \geqq 0$」と同じであるから，次のように解くこともできる。

$|x-3|=2x$ から　　$x-3=\pm 2x$ かつ $2x \geqq 0$

よって　　$x=-3,\ 1$ かつ $x \geqq 0$　　　　したがって　　$x=1$

(2)　[1]　$x \geqq 3$ のとき

不等式は　　$x-3<2x$　　　これを解くと　$x>-3$

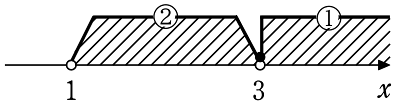
これと $x \geqq 3$ の共通範囲は　$x \geqq 3$　$\cdots\cdots ①$

[2]　$x<3$ のとき

不等式は　　$-(x-3)<2x$　　　これを解くと　$x>1$

これと $x<3$ の共通範囲は

$$1<x<3 \quad \cdots\cdots ②$$



[1]，[2] から，求める解は ① と ② を合わせた範囲で　　$x>1$

(3) [1] $x<0$ のとき

$|x|=-x$，$|x-2|=-(x-2)$ であるから，方程式は　$-x-(x-2)=6$

これを解くと　$x=-2$　　これは $x<0$ を満たす。

[2] $0\leqq x<2$ のとき

$|x|=x$，$|x-2|=-(x-2)$ であるから，方程式は　$x-(x-2)=6$

すなわち　$0\cdot x=4$　　この方程式の解はない。

[3] $2\leqq x$ のとき

$|x|=x$，$|x-2|=x-2$ であるから，方程式は　$x+(x-2)=6$

これを解くと　$x=4$　　これは $2\leqq x$ を満たす。

以上から，求める解は　$x=-2,\ 4$

10

$$\frac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\{(1+\sqrt{6})+\sqrt{7}\}\{(1+\sqrt{6})-\sqrt{7}\}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{(1+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}$$

11 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

よって　$x+\dfrac{1}{x}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$

ゆえに　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(2\sqrt{3})^2-2=10$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=10^2-2=98$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=10^3-3\cdot10=970$$

別解　$x^6+\dfrac{1}{x^6}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^4-1+\dfrac{1}{x^4}\right)=10(98-1)=970$

12 (1) $ax^2+(a^2-1)x-a=0$ から

$$(x+a)(ax-1)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

[1] $a\neq0$ のとき

①の解は　$x=-a,\ \dfrac{1}{a}$

[2]　$a=0$ のとき

①は　$x\cdot(-1)=0$ となるから，解は

$$x=0$$

(2)　$a^2x+1=a(x+1)$ から

$$a(a-1)x=a-1 \quad \cdots\cdots ①$$

$a(a-1)\neq 0$ すなわち $a\neq 0$，$a\neq 1$ のとき

$$x=\frac{1}{a}$$

$a=0$ のとき　①から　$0\cdot x=-1$

これを満たす x の値はない。すなわち，解はない。

$a=1$ のとき　①から　$0\cdot x=0$

これはすべての数 x について成り立つから，解は

すべての実数。

13　$a^{18}-b^{18}=(a^9)^2-(b^9)^2=(a^9+b^9)(^{ア}a^9-b^9)=\{(a^3)^3+(b^3)^3\}\{(a^3)^3-(b^3)^3\}$

$=(a^3+b^3)(^{イ}a^6-a^3b^3+b^6)(^{ウ}a^3-b^3)(a^6+a^3b^3+b^6)$

この式で $a=2$，$b=1$ とおくと

$$2^{18}-1=(8+1)(64-8+1)(8-1)(64+8+1)=9\times 57\times 7\times 73=3^3\times 7\times 19\times 73$$

よって，$2^{18}-1$ を素数の積で表したとき，そこに現れる素数の中で最大なものは $^{エ}73$ である。

14　$\alpha^2+\sqrt{3}\beta=\sqrt{6}$　……①

$\beta^2+\sqrt{3}\alpha=\sqrt{6}$　……②

①－②より　$\alpha^2-\beta^2-\sqrt{3}(\alpha-\beta)=0$

整理すると　$(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)-\sqrt{3}\}=0$

$\alpha\neq\beta$ から　$\alpha+\beta-\sqrt{3}=0$

したがって　$\alpha+\beta=\sqrt{3}$

①＋②より　$\alpha^2+\beta^2+\sqrt{3}(\alpha+\beta)=2\sqrt{6}$

よって　$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\sqrt{3}(\alpha+\beta)=2\sqrt{6}$

ゆえに　$(\sqrt{3})^2-2\alpha\beta+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{6}$

したがって　$\alpha\beta=3-\sqrt{6}$

$\alpha+\beta=\sqrt{3}$，$\alpha\beta=3-\sqrt{6}$ から

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(\sqrt{3})^2-2(3-\sqrt{6})}{3-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}-3}{3-\sqrt{6}}$$

$$=\frac{(2\sqrt{6}-3)(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}=\frac{3+3\sqrt{6}}{9-6}=1+\sqrt{6}$$

15 (1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$

$\sqrt{3}=1.73\cdots\cdots$ であるから　$2+\sqrt{3}=3.73\cdots\cdots$

よって　$a=3$,

$b=(2+\sqrt{3})-a=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

(2) $a+2b+b^2+1=3+2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2+1$

$=3+2\sqrt{3}-2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2+1$

$=6$

別解　$a+2b+b^2+1=a+(b+1)^2$

$=3+\{(\sqrt{3}-1)+1\}^2$

$=3+(\sqrt{3})^2$

$=6$

16 (1) $|x+2|-|x-1|>x$　……①

[1]　$x<-2$ のとき，① は　$-(x+2)+(x-1)>x$

よって　$x<-3$

これと $x<-2$ との共通範囲は　$x<-3$

[2]　$-2\leqq x<1$ のとき，① は　$(x+2)+(x-1)>x$

よって　$x>-1$

これと $-2\leqq x<1$ との共通範囲は　$-1<x<1$

[3]　$x\geqq 1$ のとき，① は　$(x+2)-(x-1)>x$

よって　$x<3$

これと $x\geqq 1$ との共通範囲は　$1\leqq x<3$

[1]，[2]，[3] から，解は　$x<-3$，$-1<x<3$

(2) $||x-1|-2|-3=0$　……①

[1]　$x\geqq 1$ のとき　$|x-1|=x-1$ であるから，① は

$|(x-1)-2|-3=0$　すなわち　$|x-3|=3$

よって　$x-3=\pm 3$　　これを解くと　$x=6$，0

$x\geqq 1$ を満たすのは　$x=6$

[2]　$x<1$ のとき　$|x-1|=-(x-1)$ であるから，① は

$|-(x-1)-2|-3=0$　すなわち　$|x+1|=3$

よって　$x+1=\pm 3$　　これを解くと　$x=2$，-4

$x<1$ を満たすのは　$x=-4$

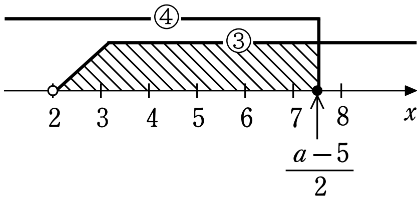
[1]，[2] から，解は　$x=6$，-4

17 $\begin{cases}7x-5>13-2x & \cdots\cdots ① \\ x+a\geqq 3x+5 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$9x>18$　　よって　$x>2$　……③

②から　$-2x \geqq -a+5$　　よって　　$x \leqq \dfrac{a-5}{2}$　……④

条件を満たすのは，③と④を同時に満たす整数 x が 3，4，5，6，7 となるときであるから　　$7 \leqq \dfrac{a-5}{2} < 8$



各辺に 2 を掛けて　　$14 \leqq a-5 < 16$

各辺に 5 を加えて　　$19 \leqq a < 21$

これが求める a の値の範囲である。