2024/09/16

- 試練 ~~あとこどもっとまとめる~~
  2回分 #4, #5
- 確率問 2問ずつ
- 工問 2〜3問

試練① #2 二次関数

[14] $y=\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ のmin $\boxed{}$ (II). ($x=\boxed{}$ (I) のとき)

まず具体化

n=1のとき $y=\sum_{k=1}^{3}|x-k| = |x-1|+|x-2|+|x-3|$

$x=2$で min
$y=2$

分け目 $x=1, 2, 3$

Level 1

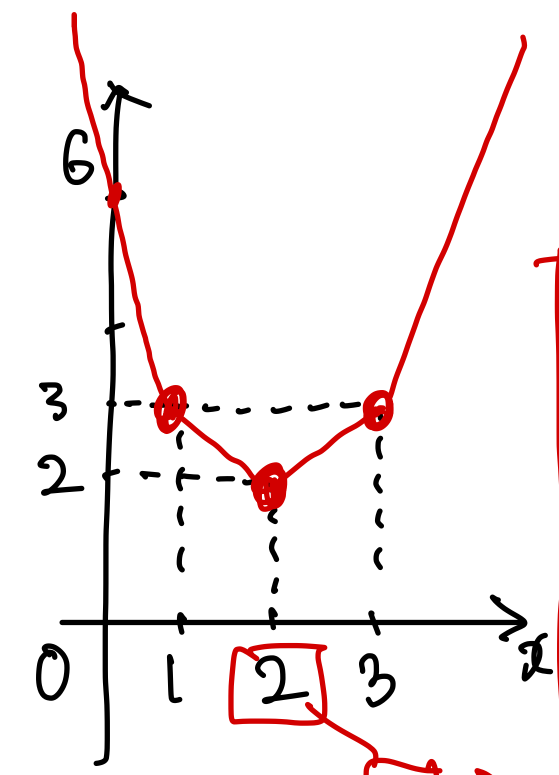
- (i) $x \leqq 1$ …
- (ii) $1 < x \leqq 2$ …
- (iii) $2 < x \leqq 3$ …
- (iv) $3 < x$ …

Level 2

x	⋯ 1	⋯ 2	⋯ 3	⋯
$\lvert x-1\rvert$	$-(\quad)$	$+(x-1)$	$+(x-1)$	$+(\quad)$
$\lvert x-2\rvert$	$-(\quad)$	$-(x-2)$	$+(x-2)$	$+(\quad)$
$\lvert x-3\rvert$	$-(\quad)$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$+(\quad)$
y	$-3x+6$	$-x+4$	x	$3x-6$

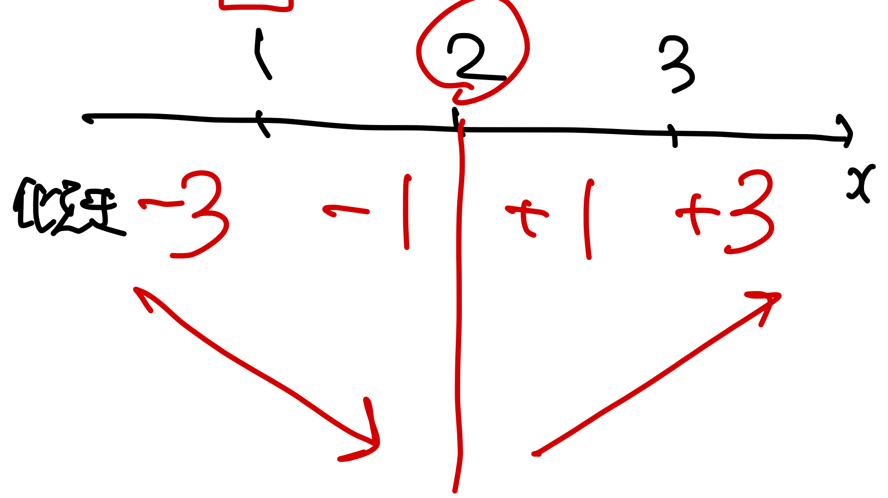
$x=1$: $\boxed{3}$　$x=2$: $\boxed{2}$　$x=3$: $\boxed{3}$

傾き $-3 \to -1 \to +1 \to +3$

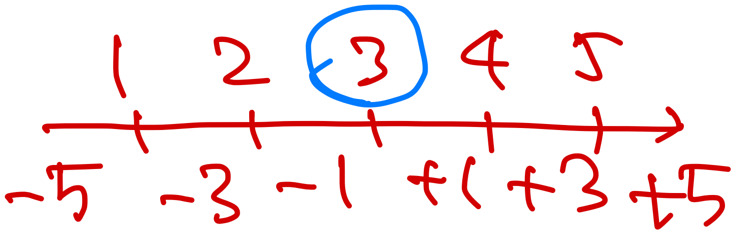


n=1のとき $x=\boxed{2}$で

Level 3



n=2のとき

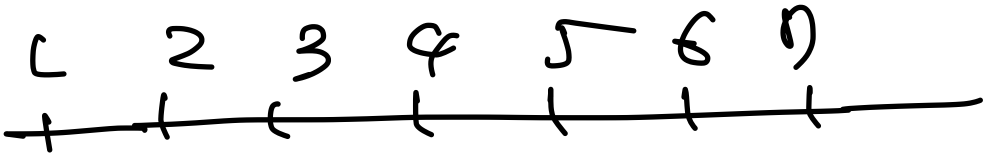


$$y=\sum_{k=1}^{5}|x-k|$$

$$=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|$$

(I) $x=\boxed{3}$ で、min (II) $\boxed{6}$ をとる

n=3の時



$$y=\sum_{k=1}^{7}|x-k|$$

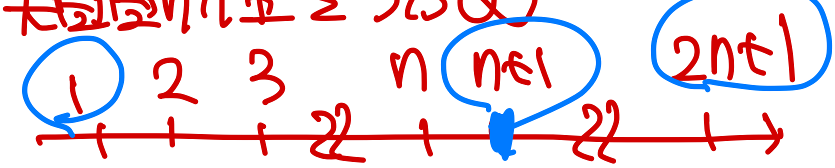
$$=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|+|x-6|+|x-7|$$

$x=\boxed{4}$ で min $\boxed{?}=12$

$3+2+1+0+1+2+3$

⋮

規則性を見つけよう



一般のn

$$y=\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$$

$$\frac{1+(2n+1)}{2}$$

(I) $x=\boxed{n+1}$ で min (II) $\boxed{?}$ をとる

$$y=|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-n|+|x-(n+1)|+\cdots$$

$$\cdots+|x-2n|+|x-(2n+1)|$$

$x=n+1$ とき

$$y=n+(n-1)+\cdots+1+0+1+2+\cdots$$

$$\cdots(n-1)+n$$

$$=\underline{n(n+1)}$$

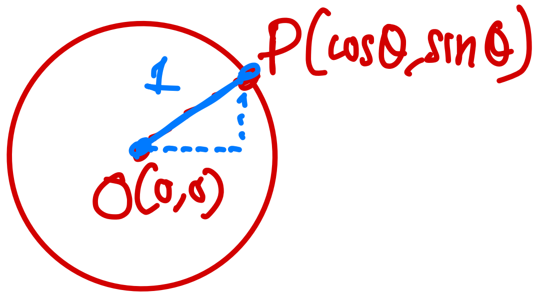
#3

[1]

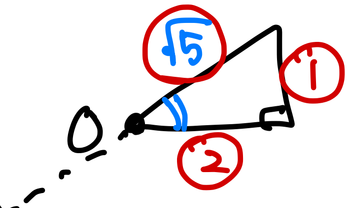
三平方の定理

$$\boxed{c^2+s^2=1} \quad \div c^2$$

$$1+t^2=\frac{1}{c^2}$$

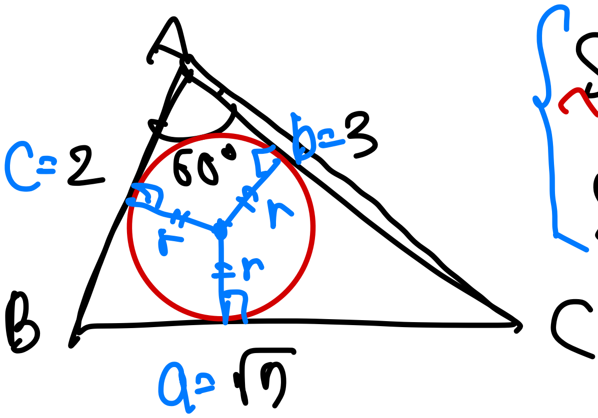


$\tan\theta = \frac{1}{2}$ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$



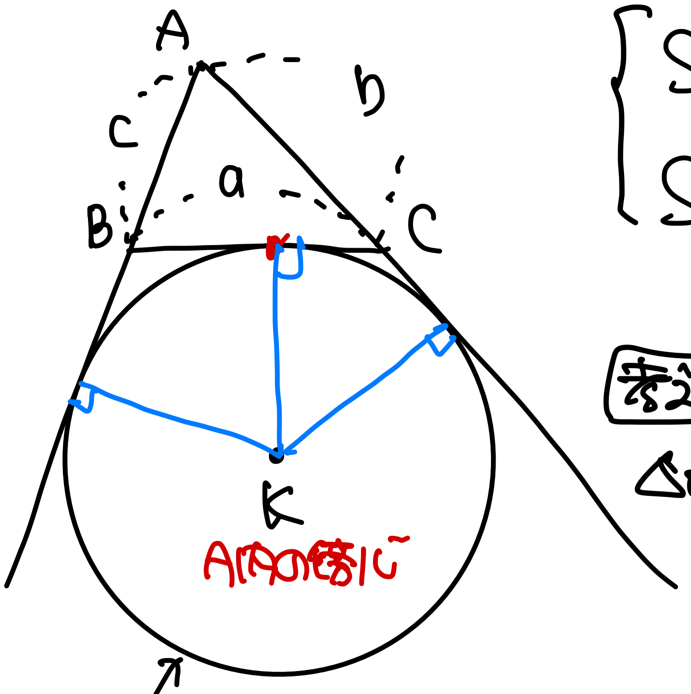
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

[5] 内接



$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \overset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin 60} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ S = \frac{1}{2}r\left(2+3+\sqrt{7}\right) \end{cases}$$

傍接円半径の求め方



A内の傍接円（半径 R とする）

$S = \triangle ABC$ 求まったとする。

$S = \boxed{\frac{1}{2}R(-a+b+c)}$

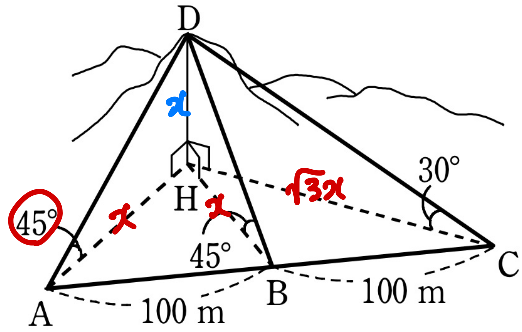
R, a, b, c で

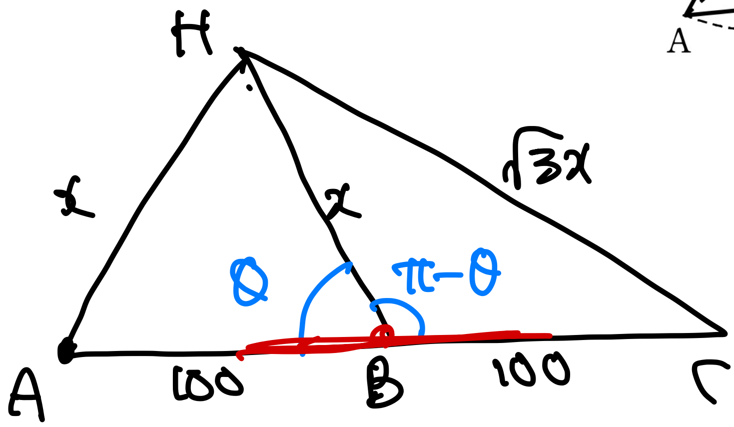
考え方

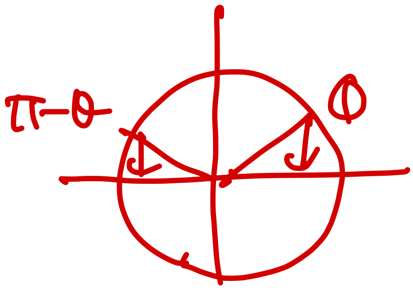
$\triangle ABC = \triangle KAB \overset{\ominus}{+} \triangle KBC + \triangle KCA$

じゃない

10 右の図のように１つの直線上に並ぶ水平面上の３点 A，B，C から山頂 D の仰角を測ると，それぞれ 45°，45°，30° であったという。AB＝100 m，BC＝100 m であるとき，山の高さを求めよ。





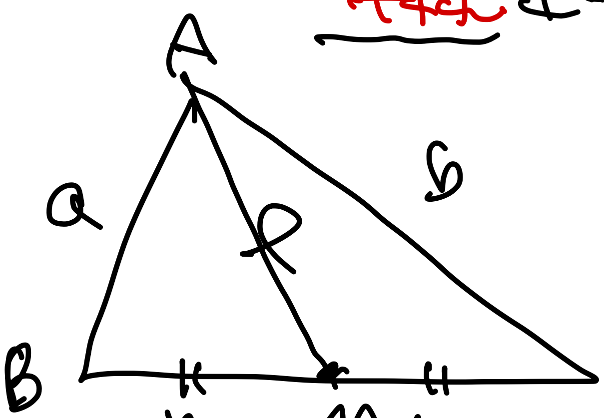


$$x^2 = x^2 + 100^2 - 2\cdot x\cdot 100\cdot \cos\theta \qquad -\cos\theta$$

$$+)\ (\sqrt{3}x)^2 = x^2 + 100^2 - 2\cdot x\cdot 100\cdot \boxed{\cos(\pi-\theta)}$$

$$x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 2(x^2 + 100^2)$$

中線定理



$$a^2 + b^2 = 2(l^2 + m^2)$$

【１７】2016 金沢医科大学 1/21, 一般（１次）医

a+c

4 枚の硬貨と 1 個のさいころを同時に投げて，表が出た硬貨の枚数を a，裏が出た硬貨の枚数を c，さいころの出た目を b とする。これらの値に対して不等式

$$ax^2+bx+c \leqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　①の解が

$$-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

になるのは $a=$ $\boxed{ア}$ 3，$b=$ $\boxed{イ}$ 4，$c=$ $\boxed{ウ}$ 1 のときである。よって①の解が②になる確率は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ $\dfrac{1}{24}$ である。

$\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{{}_4C_3}{2^4}$

(2)　k を定数とする。①の解が $x=k$ になる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$ であり，このとき，$k=$ $\boxed{コサ}$ である。

(3)　①の解がない確率は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{スセ}}$ である。

(4)　①の解が $x=-3$ を含む確率は $\dfrac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チツ}}$ である。

【２】2013 順天堂大学 1/24, 一般（１次）医

(2) $x = \cfrac{2}{1+\underbrace{\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}_{=y}}$ のように分数を無限に連ねた$\boxed{\text{連分数}}$を考える。

この連分数の値が求まることが知られている。$y = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$ とすると y は $ay^2+by+c=0$ を満たす。

ただし $a>0$，a，b，c の最大公約数は 1 とする。

このとき $a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{イ}}$，$c=\boxed{\text{ウエ}}$ であり，$y=\boxed{\text{オカ}}+\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ となるので，$x=\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ となる。

1　　2　　-1　　-1　　2　　2

$$y = \cfrac{1}{2+\underbrace{\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}_{=y}}$$

$$y=\frac{1}{2+y}$$

$$y^2+2y-1=0$$

$$y=-1\pm\sqrt{2}$$

$$x=\frac{2}{1+y}=\sqrt{2}$$

BASIC問題

1 次の関数に最大値，最小値があればそれを求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=2x^2+8x+9$

(2) $y=x^2-2x$ $(0\leqq x\leqq 3)$

(3) $y=-3x^2-2x+4$ $(-1<x<2)$

2 次の不等式を解け。

(1) $5<x^2+4x\leqq 21$　　(2) $2x+3<x^2<5$

3 2次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフを y 軸方向に2だけ平行移動したあと，y 軸に関して対称移動させ，更に x 軸方向に -3 だけ平行移動したところ，$y=x^2$ のグラフと一致した．a，b の値を求めよ.

4 グラフが3点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るような2次関数を求めよ。

STANDARD問題

5 2次不等式 $4x^2+ax+b<0$ の解が $1<x<\dfrac{5}{4}$ であるとき，2次不等式 $bx^2+ax+4\geqq 0$ の解を求めよ。

6 a は定数とする。関数 $y=2x^2-4ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。　　(2) 最大値を求めよ。

7 次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) 2次不等式 $x^2-(m-1)x+3>0$ の解がすべての実数となる。

(2) 2次不等式 $-x^2+2mx+m\geqq 0$ が解をもつ。

8 2次方程式 $x^2-(a+2)x+a(2a+1)=0$ の異なる2つの実数解を α，β とするとき，$1<\alpha<\dfrac{3}{2}<\beta$ を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

9 2次方程式 $x^2-2mx+9=0$ が $2<x<4$ の範囲で異なる2つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

10 2次方程式 $x^2+2ax+2a^2+2ab+4=0$ は，定数 a がどのような実数値であっても実数解をもたないという．実定数 b はどんな範囲にあるか求めよ.

11 $f(x)=-x^2+ax+a-2$，$g(x)=x^2-(a-2)x+3$ について，次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ。

(1) どんな x の値に対しても $f(x)<g(x)$ が成り立つ。

(2) どんな x_1，x_2 の値に対しても，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ。

実戦問題

12 xについての次の２つの不等式

$$2x^2-3x-5>0$$

$$x^2-(a+2)x+2a<0$$

を同時に満たす整数 x がただ１つ存在するとき，定数 a の値の範囲とそのときの整数 x の値を求めよ。

13 ２次不等式 $x^2-2ax+a+2>0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で常に成り立つとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

14 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ のとき，x の関数 $y=\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ の最小値とそれを与える x の値を求めよ.

数学① 第２回試練 二次関数

$\boxed{1}$ 解答 (1) 最大値はない，$x=-2$ のとき最小値 1

(2) $x=3$ のとき最大値 3，$x=1$ のとき最小値 -1

(3) $x=-\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{13}{3}$，最小値はない

$\boxed{2}$ 解答 (1) $-7 \leqq x < -5$，$1 < x \leqq 3$ (2) $-\sqrt{5} < x < -1$

$\boxed{3}$ 解答 $a=6$，$b=7$

$\boxed{4}$ 解答 $y=x^2-x+3$

$\boxed{5}$ 解答 $x \leqq \dfrac{4}{5}$，$1 \leqq x$

$\boxed{6}$ 解答 (1) $a<0$ のとき $x=0$ で最小値 $-a$，

$0 \leqq a \leqq 2$ のとき $x=a$ で最小値 $-2a^2-a$，

$2<a$ のとき $x=2$ で最小値 $-9a+8$

(2) $a<1$ のとき $x=2$ で最大値 $-9a+8$；

$a=1$ のとき $x=0$，2 で最大値 -1；

$1<a$ のとき $x=0$ で最大値 $-a$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $1-2\sqrt{3} < m < 1+2\sqrt{3}$ (2) $m \leqq -1$，$0 \leqq m$

$\boxed{8}$ 解答 $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < a < \dfrac{3}{4}$

$\boxed{9}$ 解答 $3 < m < \dfrac{25}{8}$

$\boxed{10}$ 解答 $-2 < b < 2$

$\boxed{11}$ 解答 (1) $-3 < a < 3$ (2) $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

$\boxed{12}$ 解答 $-3 \leqq a < -2$ のとき $x=-2$，$3 < a \leqq 4$ のとき $x=3$

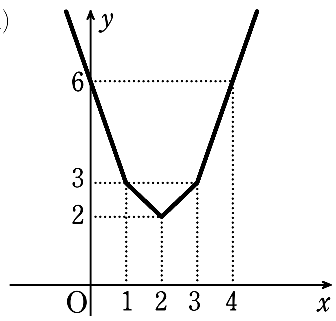
$\boxed{13}$ 解答 $-1 < a < 3$

$\boxed{14}$

解答 (1) ［図］

(2) $x=n+1$ のとき最小値 n^2+n

(1)



$\boxed{1}$ (1)　$y=2x^2+8x+9$

$=2(x^2+2\cdot 2x+2^2)-2\cdot 2^2+9$

$=2(x+2)^2+1$

よって，$x=-2$ のとき最小値 1 をとる。

最大値はない。

(2)　$y=x^2-2x$

$=(x^2-2\cdot 1x+1^2)-1^2$

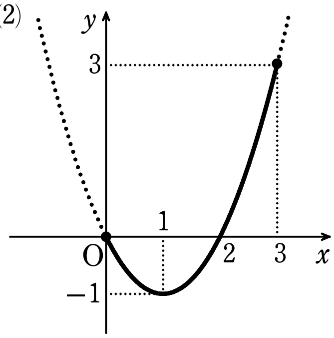
$=(x-1)^2-1 \quad (0\leqq x\leqq 3)$

よって，グラフは［図］の実線部分である。

ゆえに，$x=3$ のとき最大値 3，

$x=1$ のとき最小値 -1　をとる。

(2)



(3)　$y=-3x^2-2x+4$

$=-3\left\{x^2+2\cdot\frac{1}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4$

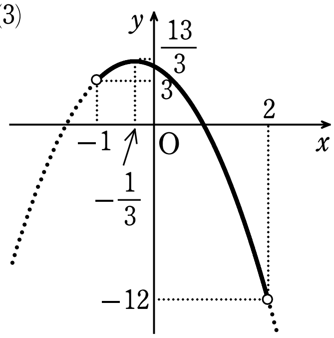
$=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{13}{3} \quad (-1<x<2)$

よって，グラフは［図］の実線部分である。

ゆえに，$x=-\frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{13}{3}$ をとる。

最小値はない。

(3)



$\boxed{2}$ (1)　$5<x^2+4x\leqq 21$ から　$\begin{cases} 5<x^2+4x & \cdots\cdots ① \\ x^2+4x\leqq 21 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$x^2+4x-5>0$　　よって　$(x+5)(x-1)>0$

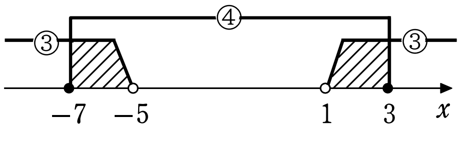
ゆえに　$x<-5,\ 1<x$　$\cdots\cdots ③$

② から　$x^2+4x-21\leqq 0$　　よって　$(x+7)(x-3)\leqq 0$

ゆえに　$-7\leqq x\leqq 3$　$\cdots\cdots ④$

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-7\leqq x<-5,\ 1<x\leqq 3$



(2)　$2x+3<x^2<5$ から　$\begin{cases} 2x+3<x^2 & \cdots\cdots ① \\ x^2<5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$x^2-2x-3>0$　　よって　$(x+1)(x-3)>0$

ゆえに　$x<-1,\ 3<x$　$\cdots\cdots ③$

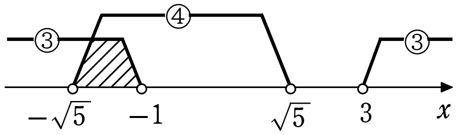
② から　$x^2-5<0$　　$x^2-5=0$ を解くと　$x=\pm\sqrt{5}$

よって，②の解は

$$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5} \quad \cdots\cdots ④$$

③と④の共通範囲を求めて

$$-\sqrt{5}<x<-1$$



$\boxed{3}$ 移動を逆にたどる.

$y=x^2$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動すると，グラフの方程式は　$y=(x-3)^2$

このグラフを y 軸に関して対称移動すると，グラフの方程式は　$y=(-x-3)^2$

すなわち　$y=(x+3)^2$

このグラフを y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，グラフの方程式は　$y=(x+3)^2-2$

すなわち　$y=x^2+6x+7$

これが $y=x^2+ax+b$ と一致するから　$a=6$，$b=7$

$\boxed{4}$ 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

そのグラフが 3 点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るから

$$\begin{cases} 3=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \\ 5=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c \\ 9=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c \end{cases} \quad すなわち \quad \begin{cases} a+b+c=3 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=5 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=9 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−①から　$3a+b=2$　……④

③−②から　$5a+b=4$　……⑤

⑤−④から　$2a=2$　　よって　$a=1$

④から　$3+b=2$　　よって　$b=-1$

①から　$1-1+c=3$　　よって　$c=3$

したがって，求める 2 次関数は　$y=x^2-x+3$

$\boxed{5}$ 条件から，$y=4x^2+ax+b$ のグラフは $1<x<\dfrac{5}{4}$ の範囲で x 軸より下側にある。

すなわち，2 点 $(1,\ 0)$，$\left(\dfrac{5}{4},\ 0\right)$ を通るから　$4+a+b=0$，$\dfrac{25}{4}+\dfrac{5}{4}a+b=0$

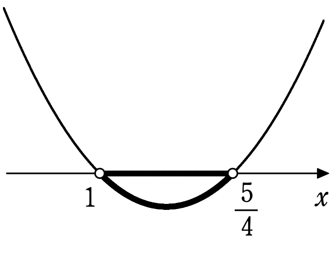
これを解くと　$a=-9$，$b=5$

よって，不等式 $bx^2+ax+4\geqq 0$ は

$$5x^2-9x+4\geqq 0$$

すなわち　$(5x-4)(x-1)\geqq 0$

これを解くと　$x\leqq\dfrac{4}{5}$，$1\leqq x$



$\boxed{6}$ $y=2x^2-4ax-a$ を変形すると

$$y=2(x-a)^2-2a^2-a$$

この放物線の軸は直線 $x=a$ である。

(1)　[1]　$a<0$ のとき

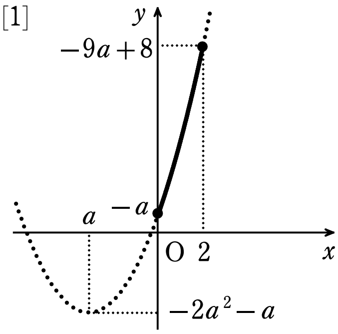
グラフは［図］の実線部分のようになる。

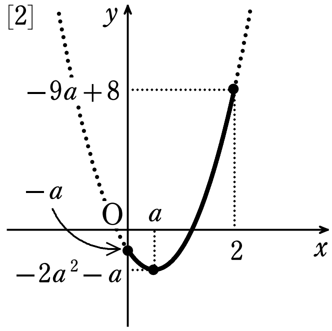
よって，$x=0$ で最小値 $-a$ をとる。

[2]　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき

グラフは［図］の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 $-2a^2-a$ をとる。



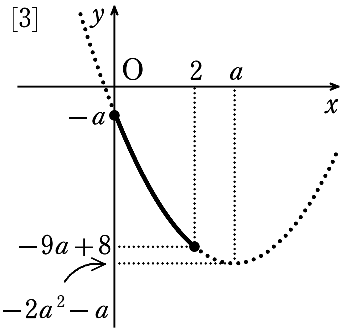


[3]　$2<a$ のとき

グラフは［図］の実線部分のようになる。

よって，

$x=2$ で最小値 $-9a+8$ をとる。



以上から

$a<0$ のとき　　$x=0$ で最小値 $-a$

$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^2-a$

$2<a$ のとき　　$x=2$ で最小値 $-9a+8$

(2)　定義域の中央の値は　1

[1]　$a<1$ のとき

グラフは［図］の実線部分のようになる。

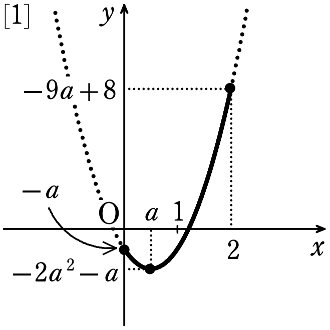
よって，$x=2$ で最大値 $-9a+8$ をとる。

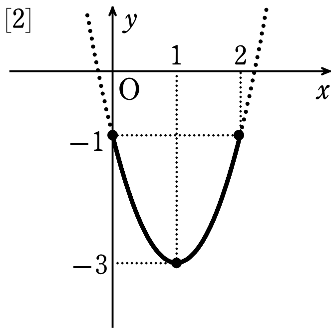
[2]　$a=1$ のとき

$y=2(x-1)^2-3$

グラフは［図］の実線部分のようになる。

よって，$x=0$，2 で最大値 -1 をとる。





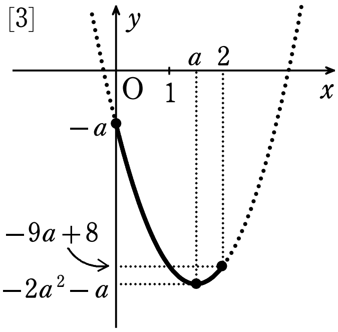
[3]　$1<a$ のとき

グラフは［図］の実線部分のようになる。

よって，

$x=0$ で最大値 $-a$

をとる。



以上から

$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $-9a+8$

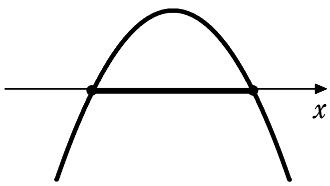
$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 -1

$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 $-a$

7 (1)　x^2 の係数は正であるから，この 2 次不等式の解がすべての実数となるための必要十分条件は　$D=\{-(m-1)\}^2-4\cdot1\cdot3<0$　すなわち　$m^2-2m-11<0$

これを解いて　$1-2\sqrt{3}<m<1+2\sqrt{3}$

(2)　この 2 次不等式が解をもつための必要十分条件は，$y=-x^2+2mx+m$ のグラフが x 軸と共有点をもつことである。



すなわち　$D=(2m)^2-4\cdot(-1)\cdot m\geqq0$

よって　$4(m^2+m)\geqq0$

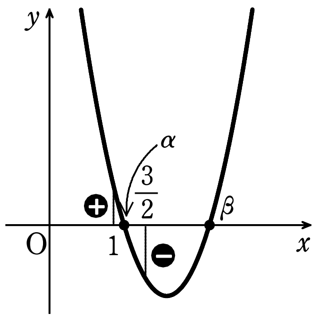
ゆえに　$m(m+1)\geqq0$

したがって　$m\leqq-1$，$0\leqq m$

$\boxed{8}$ $f(x)=x^2-(a+2)x+a(2a+1)$ とする。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，

$1<\alpha<\dfrac{3}{2}<\beta$ となる条件は，右の図より



$$f(1)>0 \quad かつ \quad f\left(\frac{3}{2}\right)<0$$

ここで　$f(1)=1^2-(a+2)\cdot1+a(2a+1)=2a^2-1$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-(a+2)\cdot\frac{3}{2}+a(2a+1)$$

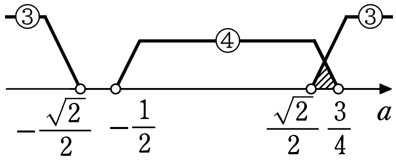
$$=\frac{1}{4}(8a^2-2a-3)$$

$$=\frac{1}{4}(2a+1)(4a-3)$$

であるから　$\begin{cases}2a^2-1>0 & \cdots\cdots ① \\ (2a+1)(4a-3)<0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$a<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a$　……③

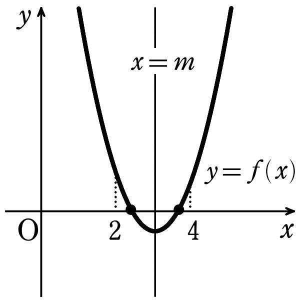
② から　$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{4}$　……④



③ と ④ の共通範囲を求めて　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{3}{4}$

$\boxed{9}$ $f(x)=x^2-2mx+9$ とおく。

方程式 $f(x)=0$ が $2<x<4$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $2<x<4$ の範囲と異なる 2 点で交わることである。



$f(x)=0$ の判別式を D とすると，求める条件は

$D>0$

かつ　軸 $x=m$ について　$2<m<4$　……①

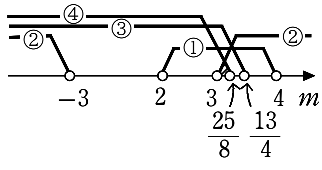
かつ　$f(2)>0$　かつ　$f(4)>0$

$\dfrac{D}{4}=m^2-9=(m+3)(m-3)$ であるから，$D>0$ より

$$m<-3,\ 3<m \quad \cdots\cdots ②$$

$f(2)>0$，$f(4)>0$ から　$-4m+13>0$，$-8m+25>0$

よって　$m<\dfrac{13}{4}$ ……③，$m<\dfrac{25}{8}$ ……④



①，②，③，④ の共通範囲を求めて

$$3<m<\frac{25}{8}$$

$\boxed{10}$ $x^2+2ax+2a^2+2ab+4=0$ の判別式を D_1 とすると　$\dfrac{D_1}{4}=a^2-(2a^2+2ab+4)<0$

すなわち　$a^2+2ab+4>0$

この不等式が，どのような a の実数値に対しても成り立つような b の値の範囲を求めればよい.

よって，$a^2+2ab+4=0$ の判別式を D_2 とすると　$\dfrac{D_2}{4}=b^2-4<0$

これを解いて　$-2<b<2$

11 (1)　$g(x)-f(x)=2x^2-2(a-1)x-a+5$

どんな x の値に対しても $f(x)<g(x)$，すなわち $g(x)-f(x)>0$ が成り立つための必要十分条件は　　$D=\{-2(a-1)\}^2-4\cdot2\cdot(-a+5)<0$

整理すると　　$a^2-9<0$　　　　よって　　$(a+3)(a-3)<0$

したがって　　$-3<a<3$

(2)　どんな x_1，x_2 の値に対しても，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つための必要十分条件は，$f(x)$ の最大値より $g(x)$ の最小値の方が大きいことである。

$$f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+a-2,\quad g(x)=\left(x-\frac{a-2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4}+3$$

よって　　$\dfrac{a^2}{4}+a-2<-\dfrac{(a-2)^2}{4}+3$　　　　整理すると　　$a^2-8<0$

ゆえに　　$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})<0$　　　　したがって　　$-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

12 $2x^2-3x-5>0$　……①，$x^2-(a+2)x+2a<0$　……②　とする。

① の左辺を因数分解すると　　$(x+1)(2x-5)>0$

したがって，① の解は　　$x<-1$　または $\dfrac{5}{2}<x$

② の左辺を因数分解すると　　$(x-a)(x-2)<0$

② の解は，$a\neq2$ のとき存在し，

　　$a<2$ のとき　$a<x<2$

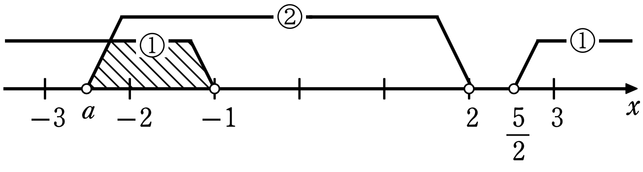
　　$a>2$ のとき　$2<x<a$

である。

よって，① と ② を同時に満たす整数 x がただ 1 つになるのは，次の各場合である。

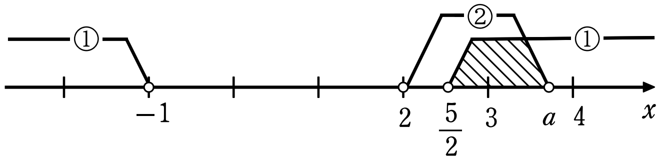
[1]　$-3\leqq a<-2$ のとき

① と ② の解の共通範囲は $a<x<-1$ で，① と ② を同時に満たす整数 x は　　-2



[2]　$3<a\leqq4$ のとき

① と ② の解の共通範囲は $\dfrac{5}{2}<x<a$ で，① と ② を同時に満たす整数 x は　3



13　2 次不等式 $x^2-2ax+a+2>0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で常に成り立つための条件は，関数 $y=x^2-2ax+a+2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最小値が 0 より大きいことである。

$f(x)=x^2-2ax+a+2$ とおくと　　$f(x)=(x-a)^2-a^2+a+2$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である。

[1]　$a<-1$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は

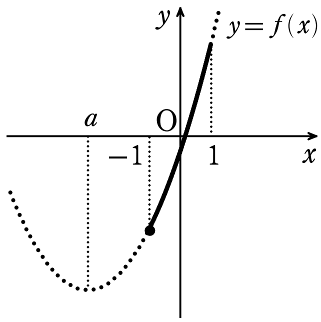
$$f(-1)=3a+3$$

よって，不等式が常に成り立つとき

$$3a+3>0$$

ゆえに　　$a>-1$

これは $a<-1$ を満たさない。



[2]　$-1\leqq a\leqq 1$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は

$$f(a)=-a^2+a+2$$

よって，不等式が常に成り立つとき

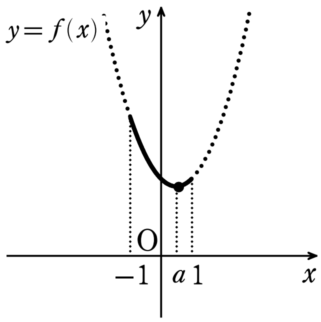
$$-a^2+a+2>0$$

すなわち　　$a^2-a-2<0$

よって　　$(a+1)(a-2)<0$

ゆえに　　$-1<a<2$

$-1\leqq a\leqq 1$ との共通範囲は　　$-1<a\leqq 1$



[3]　$1<a$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は

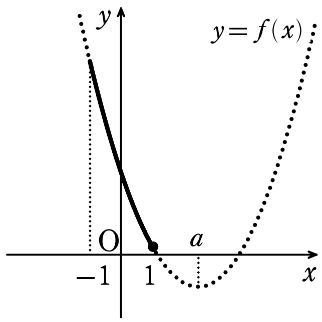
$$f(1)=-a+3$$

よって，不等式が常に成り立つとき

$$-a+3>0$$

よって　　$a<3$

$1<a$ との共通範囲は　　$1<a<3$



[1]～[3] より，求める a の値の範囲は　　$-1<a<3$

$\boxed{14}$ (1) $x \leqq 1$ のとき

$y=(1-x)+(2-x)+(3-x)=-3x+6$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$y=(x-1)+(2-x)+(3-x)=-x+4$

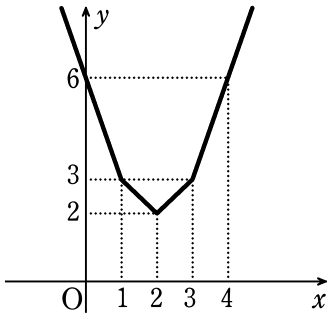
$2 \leqq x \leqq 3$ のとき

$y=(x-1)+(x-2)+(3-x)=x$

$3 \leqq x$ のとき

$y=(x-1)+(x-2)+(x-3)=3x-6$

これらを図示すると図のようになる.



(2) [1] $x \leqq 1$ のとき

$$y=\sum_{k=1}^{2n+1}(k-x)=-(2n+1)x+(2n+1)(n+1)$$

$-(2n+1)<0$ であるから，$x=1$ のとき最小値

$-(2n+1)\cdot 1+(2n+1)(n+1)=2n^2+n$ をとる.

[2] $l \leqq x \leqq l+1$ ($l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2n$) のとき

$$y=\sum_{k=1}^{l}(x-k)+\sum_{k=l+1}^{2n+1}(k-x)$$

$$=lx-\frac{1}{2}l(l+1)+\frac{1}{2}(2n+1-l)(2n+l+2)-(2n+1-l)x$$

$$=(2l-2n-1)x+\frac{1}{2}\{(2n-l+1)(2n+l+2)-l(l+1)\}$$

$$=\{2l-(2n+1)\}x+2n^2+3n-l^2-l+1$$

(i) $1 \leqq l \leqq n$ のとき

$2l-(2n+1)<0$ であるから，$x=l+1$ で最小値

$\{2l-(2n+1)\}(l+1)+2n^2+3n-l^2-l+1$

$=l^2-2nl+2n^2+n$

$=(l-n)^2+n^2+n$ をとる.

更に，この式は $1 \leqq l \leqq n$ において，$l=n$ のとき最小値 n^2+n をとる.

(ii) $n+1 \leqq l \leqq 2n$ のとき

$2l-(2n+1)>0$ であるから，$x=l$ で最小値

$\{2l-(2n+1)\}l+2n^2+3n-l^2-l+1$

$=l^2-2(n+1)l+2n^2+3n+1$

$=\{l-(n+1)\}^2+n^2+n$ をとる.

更に，この式は $n+1 \leqq l \leqq 2n$ において，$l=n+1$ のとき最小値 n^2+n をとる.

[3] $2n+1 \leqq x$ のとき

$$y=\sum_{k=1}^{2n+1}(x-k)=(2n+1)x-(2n+1)(n+1)$$

$2n+1>0$ であるから，$x=2n+1$ のとき最小値

$(2n+1)(2n+1)-(2n+1)(n+1)=2n^2+n$ をとる.

[1] ～ [3] において　$2n^2+n>n^2+n$

ゆえに，$x=n+1$ のとき最小値 n^2+n

数学①　第３回試練　三角比

BASIC問題篇

1 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。次の三角比の値を求めよ。

(1) $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$

(2) $\tan\theta = -3$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$

2 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次のような θ を求めよ。

(1) $2\sin\theta - 1 = 0$　　(2) $\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

(3) $3\tan\theta = \sqrt{3}$　　(4) $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

3 △ABC において，$a = \sqrt{6}$，$A = 60^\circ$，$C = 45^\circ$ のとき，c と外接円の半径 R を求めよ。

4 △ABC において，次のものを求めよ。

(1) $c = 4$，$a = 6$，$B = 60^\circ$ のとき　b

(2) $a = 3$，$b = \sqrt{2}$，$c = \sqrt{17}$ のとき　C

5 △ABC において，AB$=2$，BC$=\sqrt{7}$，CA$=3$ とする。△ABC の外接円の半径 R と，内接円の半径 r を求めよ。

STANDARD問題篇

6 θ が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ かつ $\cos\theta - \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たすとき，$\cos\theta + \sin\theta$，$\cos^3\theta + \sin^3\theta$ の値を求めよ。

7 円に内接する四角形 ABCD において，AB$=2$，BC$=2$，CD$=3$，DA$=4$ とする。
次の値を求めよ。

(1) AC の長さ　　(2) 四角形 ABCD の面積

(3) 2 つの対角線 AC と BD の交点を E とすると BE：ED の比

8 $a = 5$，$b = 6$，$c = 4$ の △ABC がある。頂角 A の二等分線と辺 BC の交点を D，辺 BC の中点を M とするとき，線分 AD，AM の長さを求めよ。

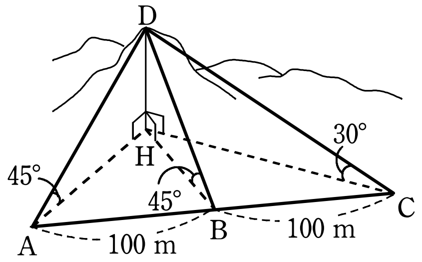
9 △ABC が次の条件を満たすとすれば，どんな三角形か。

(1) $\sin A = \sin B$

(2) $\sin A\cos A = \sin B\cos B$

実戦問題篇

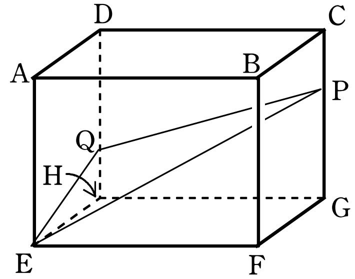
10 右の図のように１つの直線上に並ぶ水平面上の３点 A，B，C から山頂 D の仰角を測ると，それぞれ 45°，45°，30° であったという。AB＝100 m，BC＝100 m であるとき，山の高さを求めよ。



11 AB＝4，AE＝AD＝3 である直方体 ABCD−EFGH において，辺 CG と辺 HD を 1：2 に内分する点をそれぞれ P と Q とする。このとき，

EP＝ア$\boxed{}$ で，cos∠EQP＝イ$\boxed{}$ である。

さらに，△EPQ の面積は ウ$\boxed{}$ で，三角錐 AEPQ の体積は エ$\boxed{}$ である。また，点 A から △EPQ に下ろした垂線の長さは オ$\boxed{}$ である。



12 △ABC において，頂角 ∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C とし，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とする．次の関係式が成立するとき，△ABC はどのような形の三角形か．

$$a\sin A(\sin B-\sin C)=b\sin^2 B-(b+c)\sin B\sin C-c\cos^2 C+c$$

13 四角形 ABCD において，3 辺の長さをそれぞれ AB＝5，BC＝8，CD＝4，対角線 AC の長さを AC=7 とする。

このとき，$\cos\angle ABC=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$ である。

ここで，四角形 ABCD は台形であるとする。

次の $\boxed{オ}$ には下の ⓪～② から，$\boxed{カ}$ には ③，④ から当てはまるものを一つずつ選べ。

CD $\boxed{オ}$ AB･sin∠ABC であるから，$\boxed{カ}$ である。

⓪ ＜　① ＝　② ＞

③ 辺 AD と辺 BC が平行　④ 辺 AB と辺 CD が平行

したがって，BD＝$\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ である。

数学① 第３回試練 三角比

$\boxed{1}$ 解答 (1) $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (2) $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\boxed{2}$ 解答 (1) $\theta=30^\circ$，150° (2) $\theta=135^\circ$ (3) $\theta=30^\circ$ (4) $\theta=60^\circ$，180°

$\boxed{3}$ 解答 $c=2$，$R=\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ 解答 (1) $b=2\sqrt{7}$ (2) $C=135^\circ$

$\boxed{5}$ 解答 $R=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$，$r=\dfrac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{6}$

$\boxed{6}$ 解答 $\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，$\cos^3\theta+\sin^3\theta=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $\dfrac{7}{2}$ (2) $\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$ (3) 1：3

$\boxed{8}$ 解答 $\mathrm{AD}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{79}}{2}$

$\boxed{9}$ 解答 (1) BC＝CA の二等辺三角形
(2) BC＝CA の二等辺三角形 または ∠C＝90° の直角三角形

$\boxed{10}$ 解答 100 m

$\boxed{11}$ 解答 (ア) $\sqrt{29}$ (イ) $-\dfrac{1}{\sqrt{170}}$ (ウ) $\dfrac{13}{2}$ (エ) 6 (オ) $\dfrac{36}{13}$

$\boxed{12}$ 解答 AB＝ACの二等辺三角形，または ∠B＝90° の直角三角形

$\boxed{13}$ 解答 $\dfrac{(\text{ア})}{(\text{イ})}$ $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{\sqrt{(\text{ウ})}}{(\text{エ})}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (オ) ⓪ (カ) ④ (キ)$\sqrt{(\text{ク})}$ $4\sqrt{7}$

$\boxed{1}$ (1) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta>0$ であるから　$\cos\theta>0$ で

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(2) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-3)^2=10$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{10}$

$\tan\theta<0$ であるから　$\cos\theta<0$ で

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

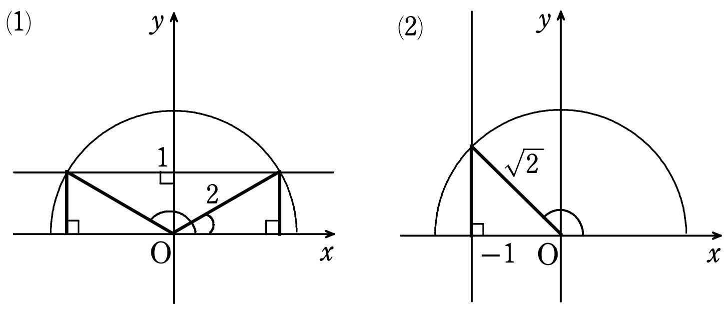
$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=-3\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\boxed{2}$ (1) $2\sin\theta-1=0$ から　　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

よって　　$\theta=30°,\ 150°$

(2) $\sqrt{2}\cos\theta+1=0$ から　　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$\theta=135°$



(3) $3\tan\theta=\sqrt{3}$ から　　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　　$\theta=30°$

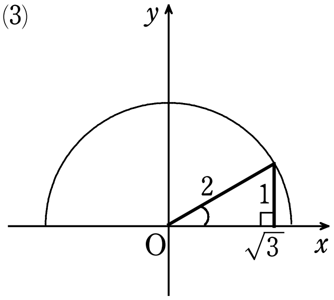
(4) $(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$ から　　$\cos\theta+1=0$　または　$2\cos\theta-1=0$

すなわち　　$\cos\theta=-1,\ \dfrac{1}{2}$

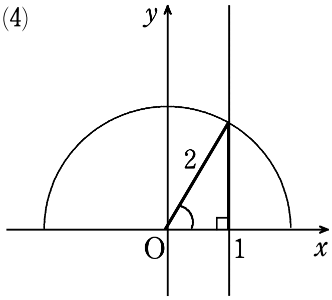
$\cos\theta=-1$ のとき　$\theta=180°$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=60°$

よって　$\theta=60^\circ$，180°

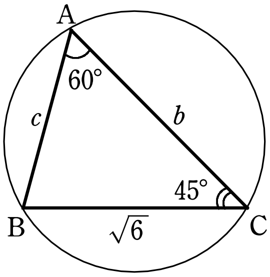
(3)



(4)



$\boxed{3}$ 正弦定理から　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{c}{\sin 45^\circ}$



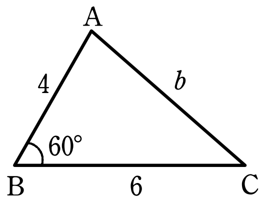
$$c=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ=\sqrt{6}\div\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=2$$

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{\sqrt{6}}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

$\boxed{4}$ (1)　余弦定理により



$$b^2=4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cos 60^\circ$$

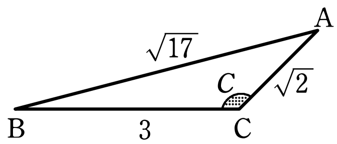
$$=16+36-2\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2}$$

$$=52-24=28$$

$b>0$ であるから

$$b=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$$

(2)　余弦定理により



$$\cos C=\frac{3^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{17})^2}{2\cdot3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{9+2-17}{2\cdot3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$C=135^\circ$

$\boxed{5}$ 余弦定理により　$\cos A=\dfrac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot2\cdot3}=\dfrac{1}{2}$

よって　$A=60^\circ$

正弦定理により　$2R=\dfrac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$

ゆえに　$R=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

また，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ に代入して　$\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}r(\sqrt{7}+3+2)$

ゆえに　$r=\frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})}=\frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{6}$

$\boxed{6}$ $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=\frac{1}{4}$$

すなわち　$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

ここで　$(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$$=1+2\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ であるから

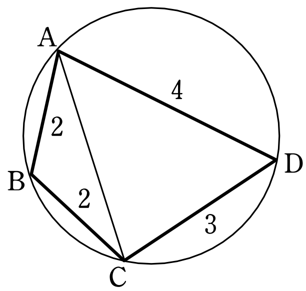
$$\cos\theta+\sin\theta>0$$

ゆえに　$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

また　$\cos^3\theta+\sin^3\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{8}\right)=\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

$\boxed{7}$ (1)　△ABC に余弦定理を適用すると



$AC^2=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cos B=8-8\cos B$　…… ①

△ACD に余弦定理を適用すると

$AC^2=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cos D=25-24\cos D$　…… ②

四角形 ABCD は円に内接するから　$D=180^\circ-B$

…… ③

①，②，③ から　$8-8\cos B=25+24\cos B$

したがって　$32\cos B=-17$　　$\cos B=-\frac{17}{32}$

① に代入して　$AC^2=\frac{49}{4}$

$AC>0$ であるから　$AC=\frac{7}{2}$

(2)　(1) から　$\sin B=\sqrt{1-\left(-\frac{17}{32}\right)^2}=\frac{7\sqrt{15}}{32}=\sin D$

よって　四角形 ABCD の面積を S とすると

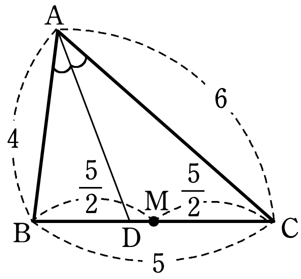
$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin B+\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\sin D=8\cdot\frac{7\sqrt{15}}{32}=\frac{7\sqrt{15}}{4}$$

(3)　BE：ED＝△ABC：△ACD

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin B:\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\sin D=2\sin B:6\sin B=1:3$$

8　△ABC に余弦定理を適用して



$$\cos B=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{1}{8}$$

また　AD は頂角 A の二等分線であるから

BD：DC＝AB：AC＝4：6＝2：3

したがって　$BD=\frac{2}{5}BC=\frac{2}{5}\cdot5=2$

よって　△ABD に余弦定理を適用すると

$$AD^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{8}=18$$

$AD>0$ であるから　$AD=3\sqrt{2}$

△ABM に余弦定理を適用して

$$AM^2=4^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot4\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{79}{4}$$

$AM>0$ であるから　$AM=\frac{\sqrt{79}}{2}$

$\boxed{9}$ (1)　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R}$$

$\sin A=\sin B$ から　$\dfrac{a}{2R}=\dfrac{b}{2R}$　　すなわち　$a=b$

よって，△ABC は BC＝CA の二等辺三角形である。

(2)　正弦定理により　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$

また，余弦定理により　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\sin A\cos A=\sin B\cos B$ から　$\dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

よって　$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$　　すなわち　$a^2c^2-a^4=b^2c^2-b^4$

ゆえに　$(a^2-b^2)(a^2+b^2)-(a^2-b^2)c^2=0$

よって　$(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a>0$，$b>0$ であるから　$a=b$　または　$a^2+b^2=c^2$

したがって，△ABC は BC＝CA の二等辺三角形 または ∠C＝90° の直角三角形である。

$\boxed{10}$ 山の高さを DH＝x (m) とすると　　HA＝x，HB＝x，HC＝$\sqrt{3}\,x$

△HAB において，余弦定理により　　$\cos A=\dfrac{100^2+x^2-x^2}{2\cdot 100\cdot x}$　　……①

△HAC において，余弦定理により　　$\cos A=\dfrac{200^2+x^2-(\sqrt{3}\,x)^2}{2\cdot 200\cdot x}$　　……②

①，② から　　$\dfrac{100^2+x^2-x^2}{2\cdot 100\cdot x}=\dfrac{200^2+x^2-(\sqrt{3}\,x)^2}{2\cdot 200\cdot x}$

整理すると　　$x^2=10000$　　$x>0$ であるから　　$x=100$

したがって，山の高さは　　100 m

$\boxed{11}$ 条件から　CP＝HQ＝1，GP＝DQ＝2

(ア)　$EG=\sqrt{4^2+3^2}=5$ であるから

$$EP=\sqrt{EG^2+GP^2}=\sqrt{5^2+2^2}={}^{ア}\sqrt{\mathbf{29}}$$

(イ)　$EQ=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，　$PQ=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

△EPQ において，余弦定理により

$$\cos\angle EQP=\frac{EQ^2+PQ^2-EP^2}{2EQ\cdot PQ}=\frac{10+17-29}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}}={}^{イ}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{170}}}$$

(ウ)　$\sin\angle EQP>0$ であるから

$$\sin\angle EQP=\sqrt{1-\cos^2\angle EQP}=\sqrt{1-\frac{1}{170}}=\frac{13}{\sqrt{170}}$$

よって　$\triangle EPQ=\frac{1}{2}EQ\cdot PQ\sin\angle EQP=\frac{1}{2}\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{13}{\sqrt{170}}={}^{ウ}\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{2}}$

(エ)　三角錐 AEPQ の底面を △AEQ とすると，高さは 4 である。

よって，三角錐 AEPQ の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle AEQ\times 4=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right)\times 4={}^{エ}\mathbf{6}$$

(オ)　A から △EPQ に下ろした垂線の長さを h とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle EPQ\times h=\frac{13}{6}h$$

よって　$\frac{13}{6}h=6$　　ゆえに　$h={}^{オ}\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{13}}$

$\boxed{12}$ $\cos^2 C=1-\sin^2 C$

△ABC の外接円の半径を R とする．正弦定理を適用すると

$$a\cdot\frac{a}{2R}\left(\frac{b}{2R}-\frac{c}{2R}\right)=b\left(\frac{b}{2R}\right)^2-(b+c)\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}-c\left\{1-\left(\frac{c}{2R}\right)^2\right\}+c$$

両辺に $4R^2$ を掛けると　$a^2(b-c)=b^3-(b+c)bc+c^3$

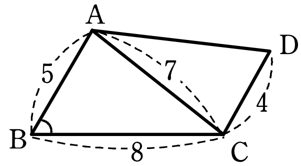
ゆえに　$a^2(b-c)=b^2(b-c)-c^2(b-c)$

したがって　$(b-c)(a^2-b^2+c^2)=0$

よって　$b=c$　または　$a^2+c^2=b^2$

ゆえに，△ABC は，AB＝AC の二等辺三角形，または ∠B＝90° の直角三角形．

$\boxed{13}$ △ABC において，余弦定理により



$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8}$$
$$=\frac{40}{2\cdot 5\cdot 8}=\frac{1}{2}$$

よって，∠ABC＝60° であるから　$\sin\angle ABC=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ここで　CD＝4

$$\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}=5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{5\cdot1.7}{2}=4.25$$

よって　$\mathrm{CD}<\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$　……①（⓪）

四角形 ABCD が台形であるとき AD∥BC または AB∥CD が成り立つ。

頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AH とすると，① から

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}>\mathrm{CD}\quad\cdots\cdots②$$

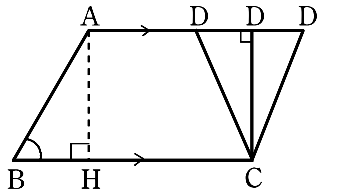
AD∥BC が成り立つと仮定すると，右の図のように

$$\mathrm{AH}\leqq\mathrm{CD}$$

となるが，これは ② に矛盾する。

よって，AD∥BC は成り立たないから，AB∥CD となる。

すなわち，辺 AB と辺 CD が平行である。（④）



右の図のように，辺 BCの延長上に点 E をとる。

AB∥CD から　$\angle\mathrm{DCE}=\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$

△BCD において，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{BCD}$$
$$=8^2+4^2-2\cdot8\cdot4\cos(180^\circ-60^\circ)=112$$

$\mathrm{BD}>0$ であるから　$\mathrm{BD}=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$