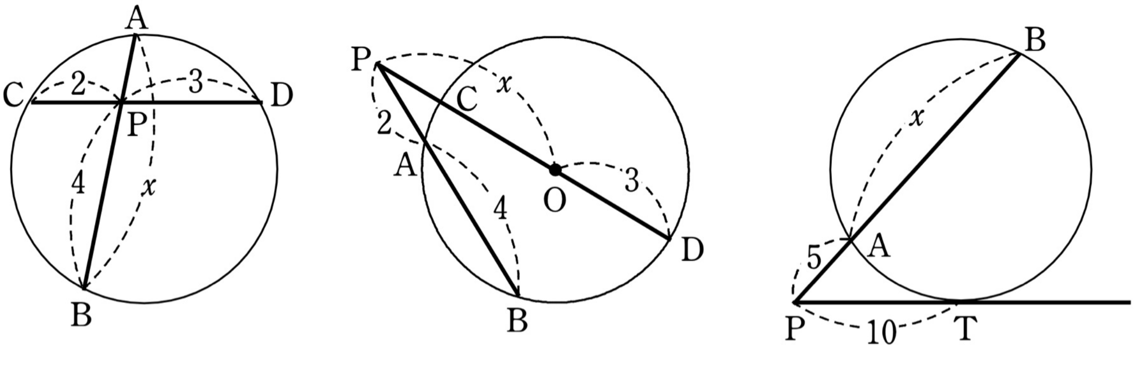
2024/09/30

前回はこちらの都合で休講でした。すみません！

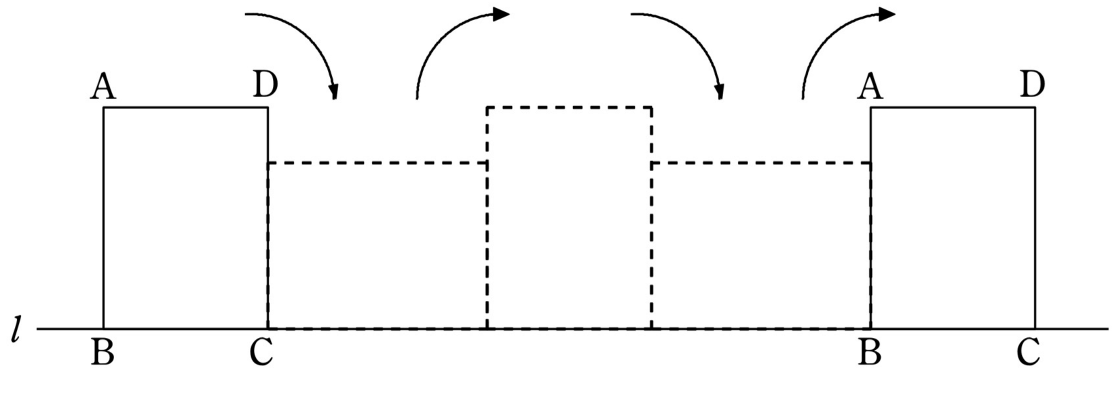
$\boxed{1}$ 直角△条件 = 三平方の定理

$\boxed{10}$ 下の図において，x の値を求めよ。O は円の中心とする。

(1)　(2)　(3)



PT は円の接線



2 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $28x+95y=3$

$95 = 28\times3+11$

$28(x+3y)+11y=3$

$28 = 11\times2+6$

$11(\underbrace{2(x+3y)+y}_{=3})+6(\underbrace{x+3y}_{=-5})=3$

$$\begin{cases} 2x+7y=3 \\ x+3y=-5 \end{cases}$$

$2x+6y=-10$

⋮

(2) $103x-75y=7$

3 (1) $(x+5)(y-2)=-9$

平行移動

$xy=-9$

反比例，直角双曲線

4 xで整理 & $D\geqq0$で解く

~~因数分解~~

$4y^2+24y+31\leqq0$

$4(y^2+6y)+31\leqq0$

$4(y+3)^2\leqq5$

$(y+3)^2\leqq\frac{5}{4}$

yは整数だから

$y+3=0,\ \pm1$

yで整理

7 左辺を y について整理すると　$y^2+2(x+2)y+5x^2-4x+7=0$ …… ①

y は整数であるから，判別式 D について，$D \geqq 0$ であることが必要．

$$\frac{D}{4}=(x+2)^2-(5x^2-4x+7) \geqq 0$$

すなわち　$4x^2-8x+3 \leqq 0$

よって　$(2x-1)(2x-3) \leqq 0$

ゆえに　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$　　これを満たす整数 x は　$x=1$

このとき，① は　$y^2+6y+8=0$

ゆえに　$(y+2)(y+4)=0$　　よって　$y=-2,\ -4$

したがって　$(x,\ y)=(1,\ -2),\ (1,\ -4)$

$48x+539y=77$ ①

[best]　77でくくる

$48x+77(7y-1)=0$

$x=77k$

$\boxed{7y-1=-48k}$ ②　$\in \mathbb{Z}$ 整

$7y+48k=1$

$(y,k)=(7,-1)$

$$\begin{pmatrix} y \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}+l\begin{pmatrix} 48 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\boxed{10}$

Best

$$48x + 539y = 77$$

互除法的变型

$$
\begin{array}{r}
11 \\
48\,\overline{)\,539} \\
\underline{48} \\
59 \\
\underline{48} \\
11
\end{array}
$$

$$48x + (48\times 11 + 11)y = 77$$

$$48(x+11y) + 11y = 77$$

$$\begin{cases} x + 11y = 0 \\ y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -77 \\ y = 7 \end{cases}$$

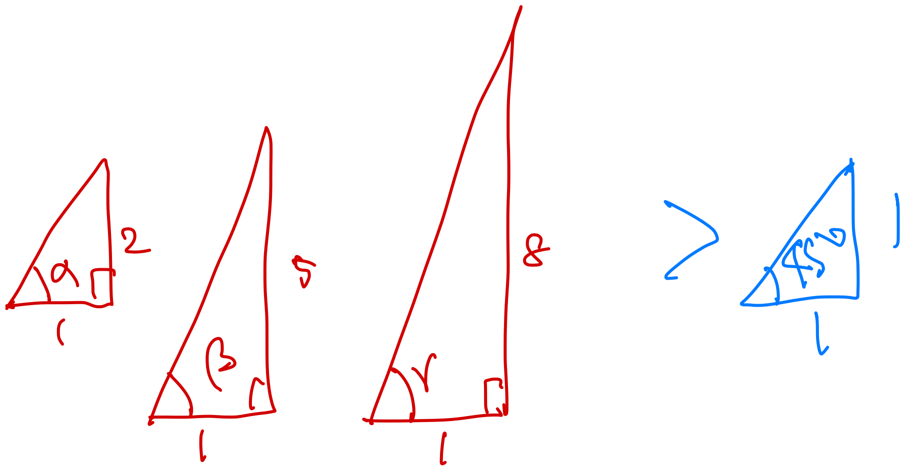
$$48x + 539y = 77$$

$$-)\ 48\times(-77) + 539\times 7 = 77 \quad \text{特}$$

$$48(x+77) + 539(y-7) = 0$$

$$\begin{cases} x + 77 = 539k \\ y - 7 = -48k \end{cases}$$

鋭角
↓
絵を描く



0°〜90°

$\boxed{3}$ α, β, γ は鋭角で，$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=5$，$\tan\gamma=8$ であるとき，次の値を求めよ。

(1) $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$　　(2) $\alpha+\beta+\gamma$

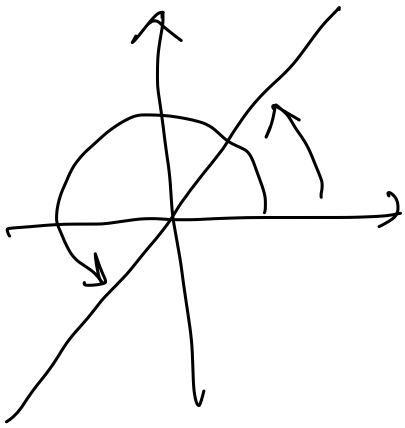
(1)

まず $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\dfrac{2+5}{1-2\cdot5}=-\dfrac{7}{9}$

次に、$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{-\frac{7}{9}+8}{1-\left(-\frac{7}{9}\right)\times8}\times\dfrac{9}{9}$

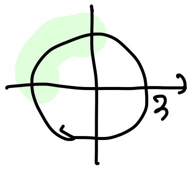
$=\dfrac{-7+8\times9}{9+7\times8}=\dfrac{65}{65}=1$

(2) $0°<\alpha+\beta+\gamma<270°$



$\alpha+\beta+\gamma=\cancel{45°},\ 225°$ — 答

4 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で，$\sin\alpha=\frac{1}{3}$ のとき，(1) $\sin 2\alpha$，(2) $\cos 2\alpha$，(3) $\cos\frac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。



$$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

($c^2+s^2=1$ 動角.にもより)

(1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

(2) $\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha-1 \\ 1-2\sin^2\alpha = 1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{cases}}$$

(3) ~~半角公式~~ $\Leftarrow$ 2倍角公式

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\qquad\quad = 1-2\sin^2\alpha$

α半分

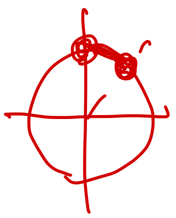
$\cos\alpha = 2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$

$\qquad = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$\begin{cases} \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2} \\ \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}{2}=\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$$

$$\cos\boxed{\frac{\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}$$



$\frac{\pi}{4}\sim\frac{\pi}{2}$

$$=+\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{6}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2\theta &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} \\ \sin^2\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{2} \end{aligned}}$$

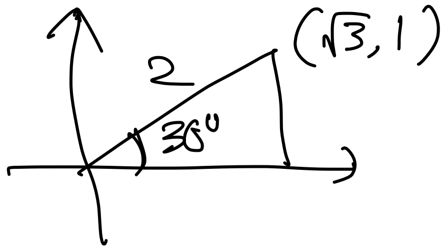
$\boxed{5}$ 次の式の値を求めよ。 $15°$

(1) $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}$　　　　(2) $\sin\frac{5}{12}\pi-\cos\frac{5}{12}\pi$

[解1] 加法定理 etc…

$\sin 15° = \sin(60°-45°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

[解2] 合成



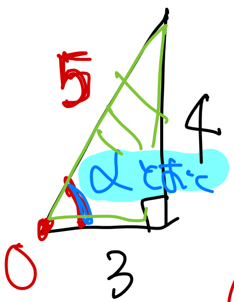
(5) $= \sqrt{3}\sin 15° + \cos 15°$

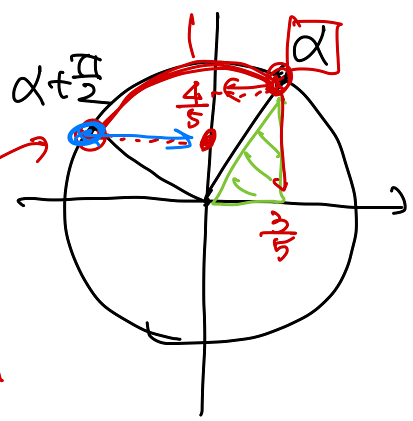
$= 2\sin(15°+30°) = 2\sin 45° = \sqrt{2}$

$\boxed{7}$ $\boxed{0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}}$ における 関数 $y=3\sin x+4\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

また，最大値を与える x に対する $\tan x$ の値を求めよ。

$y = 5\sin(x+\alpha)$　ただしαは図の角





min

ここで　$\alpha \leqq x+\alpha \leqq \alpha+\frac{\pi}{2}$ より

$\boxed{\frac{3}{5}} \leqq \sin(x+\alpha) \leqq 1$

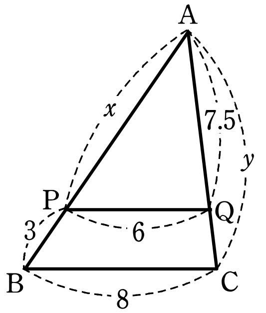
$\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \cos\alpha = \frac{3}{5}$

BASIC＋STANDARD問題

$\boxed{1}$ 3 辺の長さが a，$a-1$，$50-a$ の三角形がある。このとき，a の値の範囲を求めよ。
また，この三角形が直角三角形となるとき，a の値を求めよ。

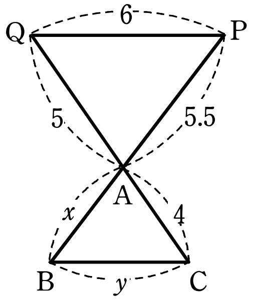
$\boxed{2}$ 次の図において，x，y の値を求めよ。

(1)



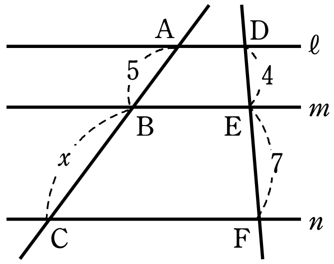
PQ∥BC

(2)



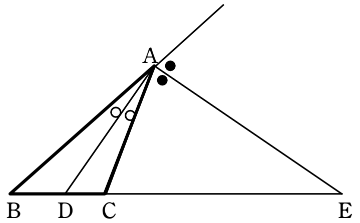
PQ∥BC

(3)



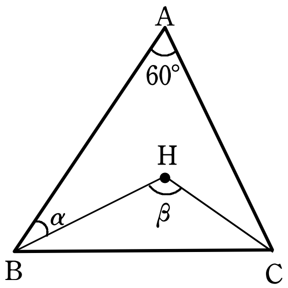
$\ell \parallel m \parallel n$

$\boxed{3}$ 下の図で，AB＝6，BC＝3，CA＝4 であり，AD は ∠BAC の二等分線，AE は ∠BAC の外角の二等分線である。
BD の長さと BE の長さをそれぞれ求めよ。

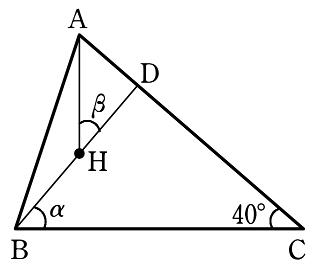


$\boxed{4}$ 下の図において，点 H は △ABC の垂心である。角 α，β を求めよ。

(1)

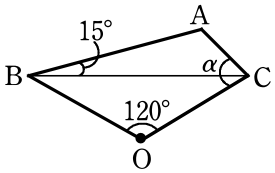


(2)

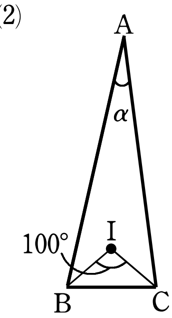


5　右の図で，点 O は △ABC の外心，点 I は △ABC の内心である。α を求めよ。

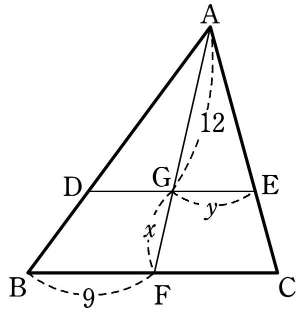
(1)



(2)



6　右の図において，点 G は △ABC の重心であり，DE∥BC である。このとき，x，y の値を求めよ。

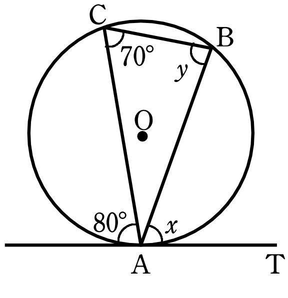


7　△ABC の辺 AB，AC 上にそれぞれ点 R，Q があり，AR：RB＝5：1，AQ：QC＝2：3 である。線分 BQ と CR の交点を O，直線 AO と辺 BC の交点を P とするとき，次の比を求めよ。

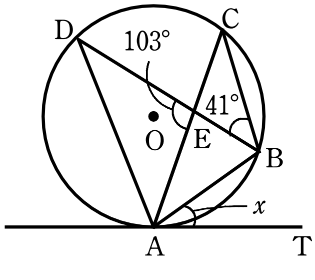
(1)　BP：PC　　(2)　AO：OP　　(3)　△ABC：△OBC

8　次の図において，直線 AT は点 A で円 O に接している。x と y を求めよ。

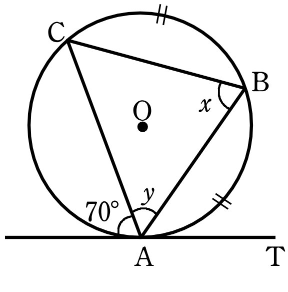
(1)



(2)

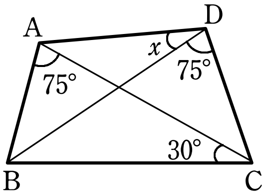


(3)

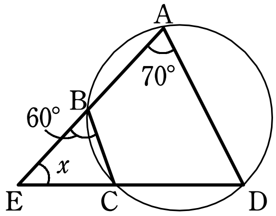


9　次の図において，角 x の大きさを求めよ。

(1)

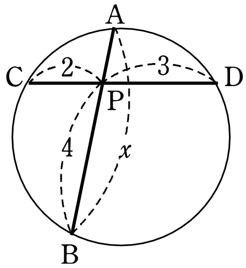


(2)

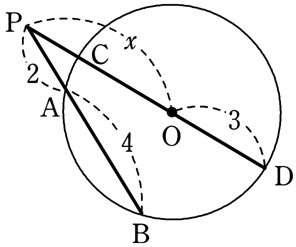


10 下の図において，x の値を求めよ。O は円の中心とする。

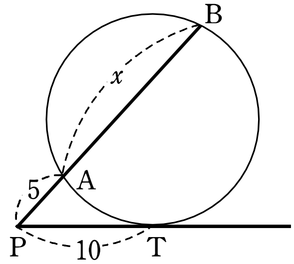
(1)



(2)

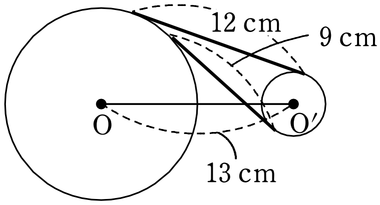


(3)



PT は円の接線

11 右の図のように，中心間の距離が 13 cm，共通外接線の長さが 12 cm，共通内接線の長さが 9 cm である 2 つの円 O，O′ がある。
この 2 つの円の半径を，それぞれ求めよ。



12 3 辺の長さが a，b，c の直角三角形の外接円の半径が $\frac{3}{2}$，内接円の半径が $\frac{1}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq b \geqq c$ とする。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　b と c の値を求めよ。

実戦問題

13 AB＝2，BC＝x，AC＝$4-x$ であるような △ABC がある。

(1) x の値の範囲を求めよ。

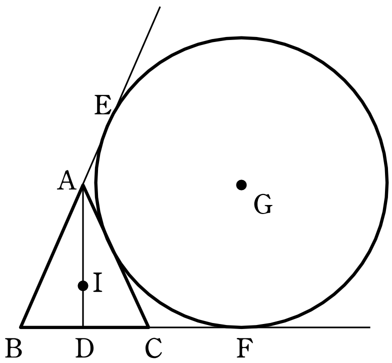
(2) △ABC が鋭角三角形であるような x の値の範囲を求めよ。

14 鋭角三角形 ABC において，AB＝8 とする。辺 AC を 1：2 に内分する点を D とし，辺 BC を 3：2 に内分する点を E とする。このとき，2 点 D，E を通る直線 ℓ と 2 点 A，B を通る直線の交点を P とすると，AP＝ア$\boxed{}$ である。また，直線 ℓ と三角形 ABC の外接円との 2 つの交点のうち P に近い方の交点を Q とし，他の交点を R とする。このとき，PQ＝3 ならば，QR＝イ$\boxed{}$ である。

15 AB＝AC である二等辺三角形 ABC の内接円の中心を I とし，内接円と辺 BC の接点を D とする。辺 BA の延長と点 E で，辺 BC の延長と点 F で接し，辺 AC と接する ∠B 内の円の中心を G とする。

(1) AD＝GF となることを証明せよ。

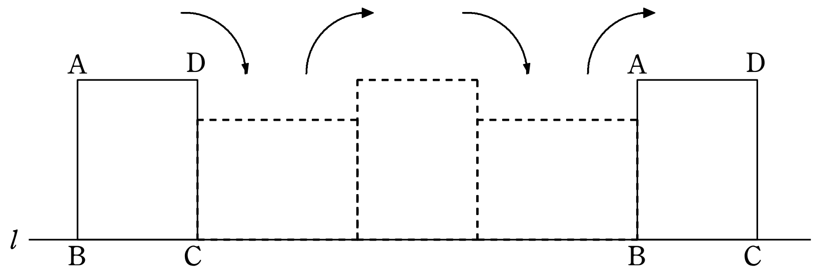
(2) AB＝7，BD＝3 のとき，IG の長さを求めよ。



16 C_1，C_2，C_3 は，半径がそれぞれ a，a，$2a$ の円とする．いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，C_1，C_2，C_3 は互いに外接しているとき，a の値を求めよ．

17 （出典･2009常総学院高）

図のように，AB＝4 cm，BC＝3 cm，CA＝5 cm である長方形 ABCD を直線 l に沿って，滑ることなくちょうど 1 回転するまで転がす。



頂点 B が動いた跡の線の長さはア$\boxed{}$$\pi$ cm であり，頂点 B が動いた跡の線と直線 l とで囲まれた部分の面積はイ$\boxed{}$ cm^2 である。ただし，π は円周率とする。

数学① 第４回試練 平面図形

$\boxed{1}$ 解答 (前半) $17<a<49$ (後半) $a=21$，41

$\boxed{2}$ 解答 (1) $x=9$，$y=10$ (2) $x=4.4$，$y=4.8$ (3) $x=8.75$

$\boxed{3}$ 解答 $\mathrm{BD}=\dfrac{9}{5}$，$\mathrm{BE}=9$

$\boxed{4}$ 解答 (1) $\alpha=30^\circ$，$\beta=120^\circ$ (2) $\alpha=50^\circ$，$\beta=40^\circ$

$\boxed{5}$ 解答 (1) 75° (2) 20°

$\boxed{6}$ 解答 $x=6$，$y=6$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $2:15$ (2) $17:3$ (3) $20:3$

$\boxed{8}$ 解答 (1) $x=70^\circ$，$y=80^\circ$ (2) $x=36^\circ$ (3) $x=70^\circ$，$y=55^\circ$

$\boxed{9}$ 解答 (1) $x=30^\circ$ (2) $x=50^\circ$

$\boxed{10}$ 解答 (1) $x=\dfrac{11}{2}$ (2) $x=\sqrt{21}$ (3) $x=15$

$\boxed{11}$ 解答 $\left(\sqrt{22}+\dfrac{5}{2}\right)\mathrm{cm}$，$\left(\sqrt{22}-\dfrac{5}{2}\right)\mathrm{cm}$

$\boxed{12}$ 解答 (1) $a=3$ (2) $b=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$，$c=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{13}$ 解答 (1) $1<x<3$ (2) $\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}$

$\boxed{14}$ 解答 (ア) 4 (イ) 13

$\boxed{15}$ 解答 (1) 略 (2) $\mathrm{IG}=\dfrac{7\sqrt{35}}{5}$

$\boxed{16}$ 解答 $a=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}$

$\boxed{17}$ 解答 (ア) 6 (イ) $\dfrac{25}{2}\pi+12$

1 (前半)　3 辺の長さが a，$a-1$，$50-a$ の三角形が存在するための条件は

$$a-(a-1)<50-a<a+(a-1)$$

すなわち　$1<50-a<2a-1$

$1<50-a$ から　$a<49$　　$50-a<2a-1$ から　$a>17$

よって，求める a の値の範囲は　$17<a<49$　…… ①

(後半)　$a>a-1$ であるから，直角三角形となるのは次の [1]，[2] のどちらかである。

[1]　長さ a の辺が斜辺になる場合

三平方の定理から　$(a-1)^2+(50-a)^2=a^2$

整理すると　$a^2-102a+2501=0$

$(a-41)(a-61)=0$

これを解くと　$a=41$，61　　① を満たすのは　$a=41$

[2]　長さ $50-a$ の辺が斜辺になる場合

三平方の定理から　$(a-1)^2+a^2=(50-a)^2$

整理すると　$a^2+98a-2499=0$

$(a-21)(a+119)=0$

これを解くと　$a=21$，-119　　① を満たすのは　$a=21$

したがって，求める a の値は　$a=21$，41

2 (1)　PQ∥BC であるから

AP：AB＝PQ：BC　…… ①，　AQ：AC＝PQ：BC　…… ②

① から　$x:(x+3)=6:8$　　ゆえに　$8x=6(x+3)$　　よって　$x=9$

② から　$7.5:y=6:8$　　ゆえに　$6y=60$　　よって　$y=10$

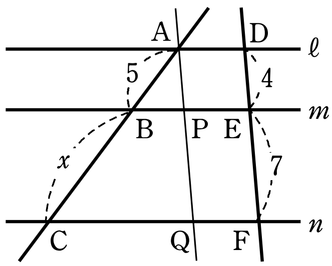
(2)　PQ∥BC であるから

AP：AB＝AQ：AC　…… ①，　PQ：BC＝AQ：AC　…… ②

① から　$5.5:x=5:4$　　ゆえに　$5x=22$　　よって　$x=4.4$

② から　$6:y=5:4$　　ゆえに　$5y=24$　　よって　$y=4.8$

(3)　点 A を通り，DF に平行な直線を引き，m，n との交点をそれぞれ P，Q とする。



BP∥CQ であるから

AB：BC＝AP：PQ　…… ①

また，四角形 APED，PQFE は，ともに 2 組の対辺が平行であるから平行四辺形である。

よって　AP＝DE＝4，PQ＝EF＝7

ゆえに，① から　$5:x=4:7$

よって　$4x=35$　　ゆえに　$x=8.75$

3 BD の長さを x とおく。

AB : AC＝BD : DC が成り立つから　$6:4=x:(3-x)$

よって　$2x=3(3-x)$　ゆえに　$x=\dfrac{9}{5}$

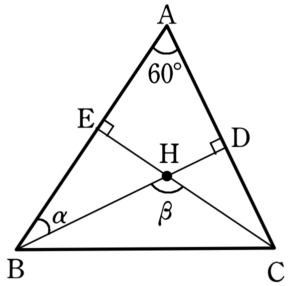
また，BE の長さを y とおく。

AB : AC＝BE : EC が成り立つから　$6:4=y:(y-3)$

よって　$2y=3(y-3)$　ゆえに　$y=9$

したがって　$\mathrm{BD}=\dfrac{9}{5}$，$\mathrm{BE}=9$

4 (1) 線分 BH の延長と辺 AC の交点を D，線分 CH の延長と辺 AB の交点を E とする。



H は △ABC の垂心であるから

$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$，$\angle\mathrm{AEC}=90^\circ$

△ABD の内角の和は 180° であるから

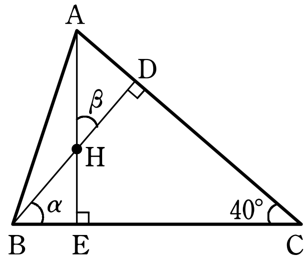
$\alpha+60^\circ+90^\circ=180^\circ$

よって　$\alpha=30^\circ$

また，$\angle\mathrm{BHC}=\angle\mathrm{BEH}+\angle\mathrm{EBH}$ であるから

$\beta=90^\circ+30^\circ=120^\circ$

(2) 線分 AH の延長と辺 BC の交点を E とする。



H は △ABC の垂心であるから

$\angle\mathrm{BDC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{AEB}=90^\circ$

△BDC の内角の和は 180° であるから

$\alpha+90^\circ+40^\circ=180^\circ$

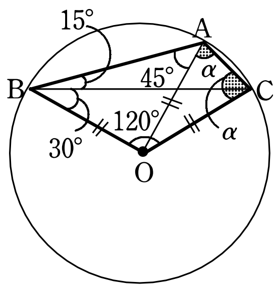
よって　$\alpha=50^\circ$

また，$\angle\mathrm{AHD}=\angle\mathrm{BHE}$ であり，△BHE の内角の和は 180° であるから

$50^\circ+90^\circ+\beta=180^\circ$

よって　$\beta=40^\circ$

5 (1) OB＝OC であるから



$\angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{OCB}=(180^\circ-120^\circ)\div 2=30^\circ$

よって　$\angle\mathrm{ABO}=15^\circ+30^\circ=45^\circ$

O と A を結ぶと，OA＝OB であるから

$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{ABO}=45^\circ$

ゆえに　$\angle\mathrm{BOA}=180^\circ-2\times45^\circ=90^\circ$

よって　$\angle\mathrm{AOC}=120^\circ-90^\circ=30^\circ$

また，OA＝OC であるから　$\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{OCA}=\alpha$

したがって　$\alpha=(180^\circ-30^\circ)\div 2=75^\circ$

(2) △IBC において

$\angle IBC+\angle ICB=180^\circ-100^\circ=80^\circ$ …… ①

BI は ∠B の二等分線であるから

$\angle B=2\angle IBC$ …… ②

CI は ∠C の二等分線であるから

$\angle C=2\angle ICB$ …… ③

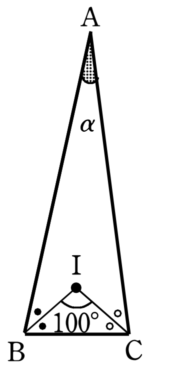
よって $\alpha=180^\circ-(\angle B+\angle C)$

②，③ を代入して

$\alpha=180^\circ-(2\angle IBC+2\angle ICB)$

$=180^\circ-2(\angle IBC+\angle ICB)$

① を代入して $\alpha=180^\circ-2\times80^\circ=20^\circ$



6 重心 G は中線 AF を 2：1 に内分するから $12:x=2:1$

よって $2x=12$ したがって $x=6$

また，F は辺 BC の中点であるから $FC=BF=9$

$GE/\!/FC$ であるから $GE:FC=AG:AF=2:3$

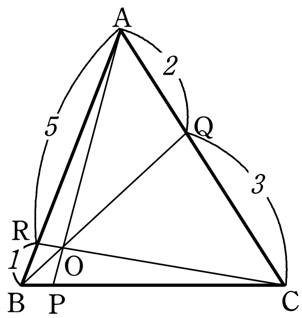
よって $y:9=2:3$ ゆえに $3y=18$ したがって $y=6$

7 (1) △ABC と点 O にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

よって $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{1}=1$ ゆえに $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{2}{15}$

したがって $BP:PC=2:15$



(2) △ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AO}{OP}\cdot\frac{PC}{CB}\cdot\frac{BR}{RA}=1$$

ここで，(1) の結果から $PC:CB=15:17$

よって $\dfrac{AO}{OP}\cdot\dfrac{15}{17}\cdot\dfrac{1}{5}=1$ ゆえに $\dfrac{AO}{OP}=\dfrac{17}{3}$

したがって $AO:OP=17:3$

(3) 辺 BC は △ABC と △OBC の共通の底辺であるから

$\triangle ABC:\triangle OBC=AP:OP$

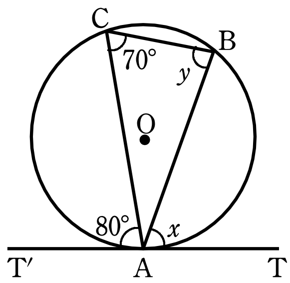
(2) の結果から $AP:OP=20:3$

したがって $\triangle ABC:\triangle OBC=20:3$

8 (1) 右の図において，接線と弦の作る角により

$x = \angle ACB = 70^\circ$

$y = \angle CAT' = 80^\circ$



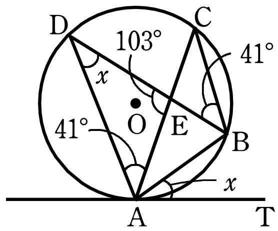
(2) 接線と弦の作る角により　$\angle ADB = \angle BAT = x$

また，円周角の定理により　$\angle DAC = \angle DBC = 41^\circ$

よって，△ADE において

$x = 180^\circ - (\angle DAE + \angle DEA)$

$= 180^\circ - (41^\circ + 103^\circ) = 36^\circ$



(3) 右の図において，接線と弦の作る角により

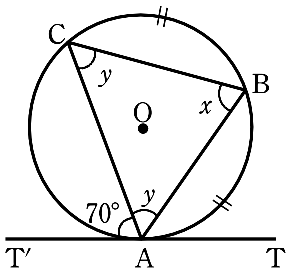
$x = \angle CAT' = 70^\circ$ ……①

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$ であるから　$\angle BCA = \angle CAB = y$

よって，△ABC において　$x + y + y = 180^\circ$

これと①から　$70^\circ + 2y = 180^\circ$

したがって　$y = 55^\circ$



9 (1) $\angle BAC = \angle BDC$ $(=75^\circ)$ から，弧 BC に対する円周角が等しいので，四角形 ABCD は円に内接する。よって　$x = \angle ADB = \angle ACB = 30^\circ$

(2) 四角形 ABCD は円に内接しているので，$\angle ADC = \angle EBC = 60^\circ$

よって，△AED において　$x + 70^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

したがって　$x = 50^\circ$

10 (1) 方べきの定理から　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$　すなわち　$(x-4) \cdot 4 = 2 \cdot 3$

整理して　$4x = 22$　よって　$x = \dfrac{11}{2}$

(2) CO は円 O の半径であるから　$CO = 3$　よって　$PC = x - 3$

方べきの定理から　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$　すなわち　$2 \cdot (2+4) = (x-3)(x+3)$

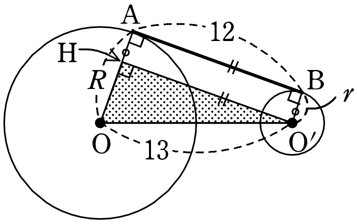
整理して　$x^2 = 21$　$x > 0$ であるから　$x = \sqrt{21}$

(3) 方べきの定理から　$PA \cdot PB = PT^2$　すなわち　$5(5+x) = 10^2$

整理して　$5x = 75$　よって　$x = 15$

11 円 O の半径を R cm，円 O′ の半径を r cm $(R>r)$ とする。

円 O，O′ と共通外接線との接点を，それぞれ A，B とする。



O′ から OA に引いた垂線を O′H とすると，

∠A＝∠B＝90° であるから

$$\mathrm{HO'}=\mathrm{AB}=12 \text{ (cm)}$$

$$\mathrm{AH}=\mathrm{BO'}=r \text{ (cm)}$$

よって　$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}-\mathrm{AH}=R-r$ (cm)

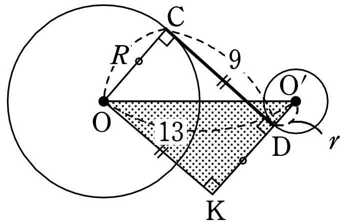
△OO′H において，∠H＝90° であるから　$\mathrm{OH}^2+\mathrm{HO'}^2=\mathrm{OO'}^2$

すなわち　$(R-r)^2+12^2=13^2$

ゆえに　$(R-r)^2=25$

$R-r>0$ であるから　$R-r=5$　…… ①

円 O，O′ と共通内接線との接点を，それぞれ C，D とする。



O から O′D の延長に引いた垂線を OK とすると，

∠C＝∠D＝90° であるから

$$\mathrm{OK}=\mathrm{CD}=9 \text{ (cm)}$$

$$\mathrm{KD}=\mathrm{OC}=R \text{ (cm)}$$

よって　$\mathrm{KO'}=\mathrm{KD}+\mathrm{DO'}=R+r$ (cm)

△O′OK において，∠K＝90° であるから　$\mathrm{OK}^2+\mathrm{KO'}^2=\mathrm{OO'}^2$

すなわち　$9^2+(R+r)^2=13^2$

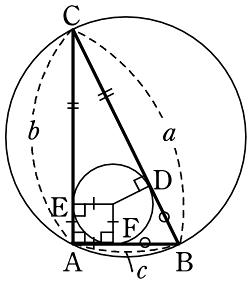
ゆえに　$(R+r)^2=88$

$R+r>0$ であるから　$R+r=2\sqrt{22}$　…… ②

①＋② から　$2R=2\sqrt{22}+5$　　よって　$R=\sqrt{22}+\dfrac{5}{2}$ (cm)

②－① から　$2r=2\sqrt{22}-5$　　よって　$r=\sqrt{22}-\dfrac{5}{2}$ (cm)

12 (1)　$a \geqq b \geqq c$ であるから，直角三角形の斜辺の長さは a である。直角三角形の斜辺の長さは外接円の直径の長さと等しいから



$$a=2\times\frac{3}{2}=3$$

(2)　直角三角形を右の図のように △ABC と表し，内接円との接点を D，E，F と定める。

$\mathrm{AE}=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{AF}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BF}=c-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{CD}=\mathrm{CE}=b-\frac{1}{2}$$

$\mathrm{BD}+\mathrm{CD}=\mathrm{BC}$ であるから　$b+c-1=3$

よって　$b+c=4$　……①

また，三平方の定理から　$b^2+c^2=3^2$　……②

①，② から，c を消去して　$b^2+(4-b)^2=9$

ゆえに　$2b^2-8b+7=0$

よって　$b=\dfrac{4\pm\sqrt{2}}{2}$

このとき，① から　$c=\dfrac{4\mp\sqrt{2}}{2}$ (上の b と複号同順)

$b\geqq c$ であるから　$b=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$，$c=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$

13 (1)　2，x，$4-x$ が三角形の 3 辺の長さとなるための条件は，次の 3 つの不等式が同時に成り立つことである。

$2+x>4-x$　……①

$x+(4-x)>2$　……②

$(4-x)+2>x$　……③

① を解くと　$x>1$

② は，$4>2$ となり常に成り立つ。

③ を解くと　$x<3$

よって，求める x の値の範囲は　$1<x<3$　……④

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形となるための条件は，④ および次の 3 つの不等式が同時に成り立つことである。

$2^2<x^2+(4-x)^2$　……⑤

$x^2<(4-x)^2+2^2$　……⑥

$(4-x)^2<x^2+2^2$　……⑦

⑤ から　$2(x^2-4x+6)>0$

$x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$ であるから，⑤ は常に成り立つ。

⑥ から　$8x-20<0$　よって　$x<\dfrac{5}{2}$　……⑥′

⑦ から　$8x-12>0$　よって　$x>\dfrac{3}{2}$　……⑦′

④，⑥′，⑦′ の共通範囲を求めて　$\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}$

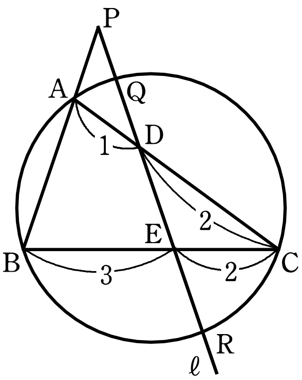
14 △ABC と直線 PE にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CE}{EB}=1 \quad すなわち \quad \frac{BP}{PA}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$$

ゆえに，$\frac{BP}{PA}=3$ から　　BP：PA＝3：1

よって，AB：AP＝2：1 であり，AB＝8 であるから

AP＝ア4



方べきの定理により　　PA・PB＝PQ・PR

すなわち　　4・12＝3・(3＋QR)

よって　　QR＝イ13

15 (1)　AD は ∠BAC の二等分線であるから，

∠DAB＝α とおくと　∠DAC＝α

また，AE，AC は円 G の接線であるから，

∠EAG＝β とおくと　∠CAG＝β

ここで，

∠BAD＋∠DAC＋∠CAG＋∠GAE＝180°

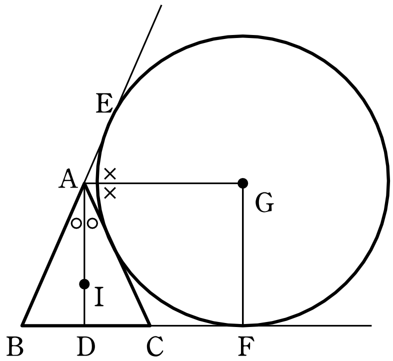
であるから　$\alpha+\alpha+\beta+\beta=180°$

よって　　$\alpha+\beta=90°$

すなわち

∠DAG＝∠DAC＋∠CAG＝90°　……①

また　∠ADF＝90°，∠GFD＝90°　……②



よって，①，② より，四角形 ADFG は長方形である。

したがって　AD＝GF

(2)　$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$

BI は ∠ABD の二等分線であるから

AI：ID＝AB：BD＝7：3

よって　$AI=\frac{7}{10}AD=\frac{7}{10}\times2\sqrt{10}=\frac{7\sqrt{10}}{5}$

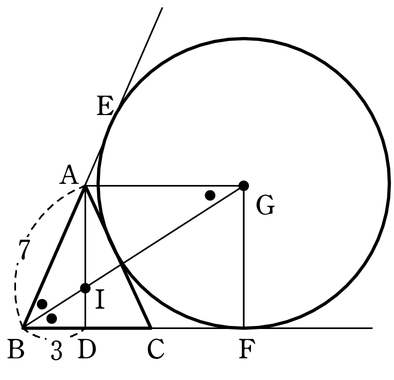
(1) より，四角形 ADFG は長方形であるから

AG∥BF

ゆえに　∠AGB＝∠GBF

また　　∠ABG＝∠GBF

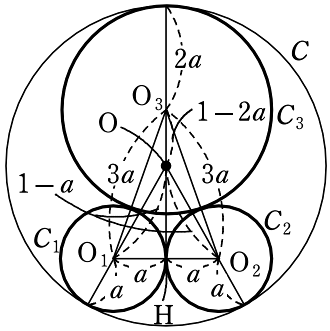
よって　∠AGB＝∠ABG



したがって，△ABG は二等辺三角形であるから　AG＝AB＝7

△AIG において，三平方の定理により

$$IG=\sqrt{AI^2+AG^2}=\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{10}}{5}\right)^2+7^2}=\frac{7\sqrt{35}}{5}$$



16 円 C，C_1，C_2，C_3 の中心をそれぞれ O，O_1，O_2，O_3 とし，2 円 C_1，C_2 の接点を H とする．

このとき　$OO_1=1-a$，$O_1O_3=a+2a=3a$

$\triangle OO_1H$ において，三平方の定理から

$OH=\sqrt{(1-a)^2-a^2}=\sqrt{1-2a}$

また　$OO_3=1-2a$

$\triangle O_3O_1H$ において，三平方の定理から

$O_3H=\sqrt{(3a)^2-a^2}=2\sqrt{2}\,a$

$OH+OO_3=O_3H$ であるから　$\sqrt{1-2a}+(1-2a)=2\sqrt{2}\,a$

ゆえに　$\sqrt{1-2a}=2(1+\sqrt{2})a-1$ …… ①

① の左辺の根号内が 0 以上であることから　$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$

① の右辺が 0 以上であることから　$a\geqq\dfrac{1}{2(1+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

よって　$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ …… ②

① の両辺を平方し，整理すると　$2(3+2\sqrt{2})a^2=(1+2\sqrt{2})a$

$a>0$ であるから　$2(3+2\sqrt{2})a=1+2\sqrt{2}$

よって　$a=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})}=\dfrac{(1+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{2(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}$

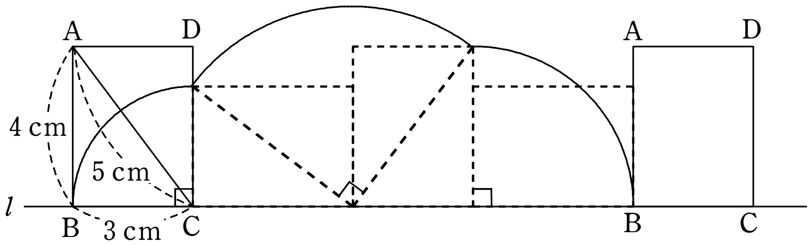
これは ② を満たす．

17 求める長さは，下の図の 3 つの弧の長さの和であるから

$$2\pi\times3\times\frac{90}{360}+2\pi\times5\times\frac{90}{360}+2\pi\times4\times\frac{90}{360}$$
$$=6\pi\,(\mathrm{cm})$$

求める面積は，3 つのおうぎ形と長方形 1 個分であるから

$$\pi\times3^2\times\frac{90}{360}+\pi\times5^2\times\frac{90}{360}+\pi\times4^2\times\frac{90}{360}+3\times4$$
$$=\frac{25}{2}\pi+12\,(\mathrm{cm}^2)$$


A
D
A
D
4 cm
5 cm
l
B
3 cm
C
B
C

BASIC＋Standard問題

1 32351 と 23009 の最大公約数を求めよ。

2 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $28x+95y=3$　　(2) $103x-75y=7$

3 (1) 方程式 $xy-2x+5y=1$ の整数解をすべて求めよ。

(2) 方程式 $3xy+3x+y=5$ を満たす 2 つの整数 x，y の組をすべて求めよ。

4 n は自然数とする。$n^2-28n+160$ が素数となるような n をすべて求めよ。

5 (1) 1960 の正の約数の個数を求めよ。

(2) 1960 の正の約数の総和を求めよ。

6 n を正の整数とする。$N=1890n$ とすると，$\sqrt{N}$ が整数になるような最小の n の値を求めよ。

7 $5x^2+2xy+y^2-4x+4y+7=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ.

8 次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

(1) $xyz=x+y+z$　$(x<y<z)$

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$　$(x\leqq y\leqq z)$

実戦問題

9 $\dfrac{40}{21}$，$\dfrac{16}{39}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

10 方程式 $48x+539y=77$ を満たす整数解 x, y をすべて求めよ.

11 次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

12 自然数 N を 5 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(5)}$ になり，7 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(7)}$ になるという。a，b，c を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

13 100! を素因数分解すると，$2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^{16}\cdot11^9\cdot13^7\cdots\cdots$ となる。a，b，c の値を求めよ。

14 素数 p，q，r に対して $2p^3qr+19p^2q^2r-10pq^3r=111111$ が成り立つとき，p，q，r の値を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　173

$\boxed{2}$ 解答　k は整数とする。

(1)　$x=95k+51$，$y=-28k-15$　　(2)　$x=75k-56$，$y=103k-77$

$\boxed{3}$ 解答　$(x,\ y)=(-4,\ -7)$，$(-2,\ -1)$，$(4,\ 1)$，$(-6,\ 11)$，$(-8,\ 5)$，$(-14,\ 3)$

解答　$(x,\ y)=(-1,\ -4)$，$(0,\ 5)$

$\boxed{4}$ 解答　$n=7$，21

$\boxed{5}$ 解答　(1)　24　　(2)　5130

$\boxed{6}$ 解答　210

$\boxed{7}$ 解答　$(x,\ y)=(1,\ -2)$，$(1,\ -4)$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$　　(2)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 4)$

$\boxed{9}$ 解答　$\dfrac{273}{8}$

$\boxed{10}$ 解答　$x=-77+539t,\ y=7-48t$（t は整数）

$\boxed{11}$ 解答　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6)$，$(2,\ 6,\ 3)$，$(3,\ 2,\ 6)$，$(3,\ 6,\ 2)$，$(6,\ 2,\ 3)$，$(6,\ 3,\ 2)$，
$(2,\ 4,\ 4)$，$(4,\ 2,\ 4)$，$(4,\ 4,\ 2)$，$(3,\ 3,\ 3)$

$\boxed{12}$ 解答　$a=2$，$b=3$，$c=1$；$N=66$

$\boxed{13}$ 解答　$a=97$，$b=48$，$c=24$

$\boxed{14}$ 解答　(ア)　7　　(イ)　3　　(ウ)　13

$\boxed{1}$　$32351=23009\cdot 1+9342$

$23009=9342\cdot 2+4325$

$9342=4325\cdot 2+692$

$4325=692\cdot 6+173$

$692=173\cdot 4+0$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 4 & 6 & 2 & 2 & 1 \\
173\,) & 692 &)\,4325 &)\,9342 &)\,23009 &)\,32351 \\
 & 692 & 4152 & 8650 & 18684 & 23009 \\
\hline
 & 0 & 173 & 692 & 4325 & 9342
\end{array}
$$

よって，最大公約数は　173

$\boxed{2}$ (1)　　$28x+95y=3$　　…… ①

$x=17$，$y=-5$ は，$28x+95y=1$ の整数解の1 つである。

よって　　$28\cdot 17+95\cdot(-5)=1$

両辺に 3 を掛けると

$28\cdot 51+95\cdot(-15)=3$　　…… ②

①−② から　$28(x-51)+95(y+15)=0$　…… ③

28 と 95 は互いに素であるから，③ のすべての整数解は

$x-51=95k$，$y+15=-28k$（k は整数）

したがって，① のすべての整数解は

$x=95k+51$，$y=-28k-15$（k は整数）

参考 1　28 と 95 に互除法を用いると

$95=28\cdot 3+11$　　移項すると　$11=95-28\cdot 3$

$28=11\cdot 2+6$　　移項すると　$6=28-11\cdot 2$

$11=6\cdot 1+5$　　移項すると　$5=11-6\cdot 1$

$6=5\cdot 1+1$　　移項すると　$1=6-5\cdot 1$

よって　$1=6-5\cdot 1=6-(11-6\cdot 1)\cdot 1$

$=6\cdot 2-11\cdot 1=(28-11\cdot 2)\cdot 2-11\cdot 1$

$=28\cdot 2-11\cdot 5=28\cdot 2-(95-28\cdot 3)\cdot 5$

$=28\cdot 17+95\cdot(-5)$

参考 2　$a=28$，$b=95$ とおく。

$11=95-28\cdot 3$ より　$11=b-a\cdot 3=-3a+b$

$6=28-11\cdot 2$ より　$6=a-(-3a+b)\cdot 2$

$=7a-2b$

$5=11-6\cdot 1$ より　$5=(-3a+b)-(7a-2b)$

$=-10a+3b$

$1=6-5\cdot 1$ より　$1=(7a-2b)-(-10a+3b)$

$=17a-5b$

よって，$17a-5b=1$ より　$28\cdot 17+95\cdot(-5)=1$

(2)　　$103x-75y=7$　　…… ①

$x=-8$，$y=-11$ は，$103x-75y=1$ の整数解の 1 つである。

よって　$103\cdot(-8)-75\cdot(-11)=1$

両辺に 7 を掛けると

$$103\cdot(-56)-75\cdot(-77)=7 \quad \cdots\cdots ②$$

①−② から　$103(x+56)-75(y+77)=0 \quad \cdots\cdots ③$

103 と 75 は互いに素であるから，③ のすべての整数解は

$$x+56=75k,\ y+77=103k \quad (k \text{ は整数})$$

したがって，① のすべての整数解は

$$x=75k-56,\ y=103k-77 \quad (k \text{ は整数})$$

参考 1　103 と 75 に互除法を用いると

$103=75\cdot1+28$　移項すると　$28=103-75\cdot1$

$75=28\cdot2+19$　移項すると　$19=75-28\cdot2$

$28=19\cdot1+9$　移項すると　$9=28-19\cdot1$

$19=9\cdot2+1$　移項すると　$1=19-9\cdot2$

よって　$1=19-9\cdot2=19-(28-19\cdot1)\cdot2$

$=19\cdot3-28\cdot2=(75-28\cdot2)\cdot3-28\cdot2$

$=75\cdot3-28\cdot8=75\cdot3-(103-75\cdot1)\cdot8$

$=103\cdot(-8)-75\cdot(-11)$

参考 2　$a=103$，$b=75$ とおく。

$28=103-75\cdot1$ より　$28=a-b$

$19=75-28\cdot2$ より　$19=b-(a-b)\cdot2$

$=-2a+3b$

$9=28-19\cdot1$ より　$9=(a-b)-(-2a+3b)$

$=3a-4b$

$1=19-9\cdot2$ より　$1=(-2a+3b)-(3a-4b)\cdot2$

$=-8a+11b$

よって，$-8a+11b=1$ より　$103\cdot(-8)-75\cdot(-11)=1$

3　$xy-2x+5y=(x+5)(y-2)+10$ であるから，方程式 $xy-2x+5y=1$ を変形すると

$(x+5)(y-2)+10=1$　すなわち　$(x+5)(y-2)=-9$

x，y は整数であるから，$x+5$，$y-2$ はともに整数である。

積が -9 になる整数 $x+5$，$y-2$ の組 は

$$(x+5,\ y-2)=(1,\ -9),\ (3,\ -3),\ (9,\ -1),\ (-1,\ 9),\ (-3,\ 3),\ (-9,\ 1)$$

よって，求める整数解は

$$(x,\ y)=(-4,\ -7),\ (-2,\ -1),\ (4,\ 1),\ (-6,\ 11),\ (-8,\ 5),\ (-14,\ 3)$$

$3xy+3x+y=5$ から　$(3x+1)(y+1)=6$

xは整数であるから，$3x+1$ は 3 で割ると 1 余る整数である。

よって　$(3x+1,\ y+1)=(-2,\ -3),\ (1,\ 6)$

したがって　$(x,\ y)=(-1,\ -4),\ (0,\ 5)$

$\boxed{4}$　$n^2-28n+160=(n-8)(n-20)$　または　$n^2-28n+160=(8-n)(20-n)$

$n-8>n-20$，$8-n<20-n$ であるから，$n^2-28n+160$ が素数であるとき

$n-20=1$　または　$8-n=1$

$n-20=1$ より　$n=21$，　$8-n=1$ より　$n=7$

$n=21$ のとき　$n^2-28n+160=13\cdot1=13$　(素数)

$n=7$ のとき　$n^2-28n+160=1\cdot13=13$　(素数)

よって，求める自然数 n は　$n=7,\ 21$

$\boxed{5}$ 1960 を素因数分解すると　$1960=2^3\cdot5\cdot7^2$

よって，1960 のすべての正の約数は $(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7+7^2)$ を展開したときの項として１つずつ出てくる。

(1)　1960 の正の約数の個数は　$(3+1)(1+1)(2+1)=4\times2\times3=24$ (個)

(2)　1960 の正の約数の和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7+7^2)=(1+2+4+8)(1+5)(1+7+49)$$
$$=15\times6\times57=5130$$

$\boxed{6}$ 1890 を素因数分解すると　$1890=2\cdot3^3\cdot5\cdot7$

1890 に $2\cdot3\cdot5\cdot7$ を掛けると，$2^2\cdot3^4\cdot5^2\cdot7^2$ すなわち $(2\cdot3^2\cdot5\cdot7)^2$ になる。

よって，n の最小値は　$n=2\cdot3\cdot5\cdot7=210$

$\boxed{7}$ 左辺を y について整理すると　$y^2+2(x+2)y+5x^2-4x+7=0$ …… ①

y は整数であるから，判別式 D について，$D\geqq0$ であることが必要.

$$\frac{D}{4}=(x+2)^2-(5x^2-4x+7)\geqq0$$

すなわち　$4x^2-8x+3\leqq0$

よって　$(2x-1)(2x-3)\leqq0$

ゆえに　$\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}$　　これを満たす整数 x は　$x=1$

このとき，① は　$y^2+6y+8=0$

ゆえに　$(y+2)(y+4)=0$　　よって　$y=-2,\ -4$

したがって　$(x,\ y)=(1,\ -2),\ (1,\ -4)$

$\boxed{8}$ (1)　$x<y<z$ であるから　$xyz=x+y+z<z+z+z=3z$

よって，$xyz<3z$ の両辺を正の数 z で割ると　$xy<3$

これを満たす $x<y$ である自然数 $x,\ y$ の組は　$x=1,\ y=2$

このとき，与えられた等式は　$2z=1+2+z$

よって　$z=3$

このとき，$y<z$ を満たす。

したがって　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$

(2)　$1 \leqq x \leqq y \leqq z$ であるから　$\dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{x}$　……①

よって　$\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{3z} \leqq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3x} = \dfrac{11}{6x}$

したがって　$x \leqq \dfrac{11}{8}$

x は自然数であるから　$x=1$

このとき，与えられた等式は　$\dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{3z} = \dfrac{1}{3}$　……②

① から　$\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{3z} \leqq \dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{3y} = \dfrac{5}{6y}$

したがって　$y \leqq \dfrac{5}{2}$

y は自然数で，$1 = x \leqq y$ であるから　$y=1,\ 2$

$y=1$ のとき，② から　$\dfrac{1}{3z} = -\dfrac{1}{6}$

これを満たす自然数 z はない。

$y=2$ のとき，② から　$\dfrac{1}{3z} = \dfrac{1}{12}$

よって　$z=4$　($y \leqq z$ を満たす)

したがって　$(x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ 4)$

$\boxed{9}$　求める分数を $\dfrac{a}{b}$ (a，b は互いに素である自然数) とする。

$\dfrac{40}{21} \times \dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 21 の倍数，b は 40 の約数　……①

$\dfrac{16}{39} \times \dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 39 の倍数，b は 16 の約数　……②

求める分数 $\dfrac{a}{b}$ を最小にするには，a を最小にし，b を最大にするとよい。

①，② から

a は 21 と 39 の最小公倍数，b は 40 と 16 の最大公約数

とすればよい。

よって　$a=273$，$b=8$

したがって，求める分数は　$\dfrac{273}{8}$

$\boxed{10}$　方程式を変形して　$48x = 77(1-7y)$

48 と 77 は互いに素であるから，$x=77s$ (s は整数) とおける．ゆえに　$48s = 1-7y$

よって　$7y=1-48s=(1+s)-49s$

ここで，$s+1=7t$ (t は整数) とおけるから $y=t-7s=t-7(7t-1)=7-48t$

したがって　$x=77s=77(7t-1)=-77+539t$ (t は整数)

11　x，y，z を入れ替えても，もとの式と変わらない。

x，y，z は自然数であるから，$1\leqq x\leqq y\leqq z$　…… ① と仮定する。

$$\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{y}\leqq\frac{1}{x}\quad\cdots\cdots ②$$

よって　$1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

$\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$

ゆえに　$x\leqq 3$

x は自然数であるから　$x=1$，2，3

[1]　$x=1$ のとき

与式から，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ となり，これを満たす自然数 y，z はない。

[2]　$x=2$ のとき

与式から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$　…… ③

② から　$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

ゆえに　$y\leqq 4$

y は自然数で $2=x\leqq y$ であるから　$y=2$，3，4

$y=2$ のとき　③ から　$\dfrac{1}{z}=0$　　これを満たす自然数 z はない。

$y=3$ のとき　③ から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}$　　よって　$z=6$　($y\leqq z$ を満たす)

$y=4$ のとき　③ から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　　よって　$z=4$　($y\leqq z$ を満たす)

[3]　$x=3$ のとき

与式から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$　…… ④

② から　$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

ゆえに　$y\leqq 3$

y は自然数で，$3=x\leqq y$ であるから　$y=3$

このとき ④ から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$　　よって　$z=3$　($y\leqq z$ を満たす)

以上から　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6)$，$(2,\ 4,\ 4)$，$(3,\ 3,\ 3)$

よって，① の条件をはずして考えると，求める x，y，z の組は

(2，3，6)，(2，6，3)，(3，2，6)，(3，6，2)，(6，2，3)，(6，3，2)，(2，4，4)，
(4，2，4)，(4，4，2)，(3，3，3)

12　$abc_{(5)}$ は 3 桁の 5 進数であるから　　$1 \leqq a \leqq 4$，$0 \leqq b \leqq 4$，$0 \leqq c \leqq 4$

$cab_{(7)}$ は 3 桁の 7 進数であるから　　$1 \leqq c \leqq 6$，$0 \leqq a \leqq 6$，$0 \leqq b \leqq 6$

よって　　$1 \leqq a \leqq 4$，$0 \leqq b \leqq 4$，$1 \leqq c \leqq 4$　……①

N を 10 進法で表すと

$$N = abc_{(5)} = a \cdot 5^2 + b \cdot 5^1 + c \cdot 5^0 = 25a + 5b + c$$

$$N = cab_{(7)} = c \cdot 7^2 + a \cdot 7^1 + b \cdot 7^0 = 49c + 7a + b$$

よって　　$25a + 5b + c = 49c + 7a + b$

整理すると　　$9a + 2b = 24c$　……②

ここで，① から

$$24c = 9a + 2b \leqq 9 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 44$$

ゆえに　　$c \leqq \dfrac{11}{6} = 1.8\cdots\cdots$

よって，① から　　$c = 1$

② に代入すると　　$9a + 2b = 24$

これと ① を満たす整数 a，b は　　$a = 2$，$b = 3$

したがって　　$a = 2$，$b = 3$，$c = 1$

また　　$N = 25 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 = 66$

13　1 から 100 までの自然数うち

2 の倍数の個数は，100 を 2 で割った商で　　50

2^2 の倍数の個数は，100 を 2^2 で割った商で　　25

2^3 の倍数の個数は，100 を 2^3 で割った商で　　12

2^4 の倍数の個数は，100 を 2^4 で割った商で　　6

2^5 の倍数の個数は，100 を 2^5 で割った商で　　3

2^6 の倍数の個数は，100 を 2^6 で割った商で　　1

$100 < 2^7$ であるから，2^n $(n \geqq 7)$ の倍数はない。

よって　　$a = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$

次に，1 から 100 までの自然数のうち，

3 の倍数の個数は，100 を 3 で割った商で　　33

3^2 の倍数の個数は，100 を 3^2 で割った商で　　11

3^3 の倍数の個数は，100 を 3^3 で割った商で　　3

3^4 の倍数の個数は，100 を 3^4 で割った商で　　1

$100 < 3^5$ であるから，3^n $(n \geqq 5)$ の倍数はない。

よって　　$b=33+11+3+1=48$

更に，1 から 100 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，100 を 5 で割った商で　　20

5^2 の倍数の個数は，100 を 5^2 で割った商で　　4

$100<5^3$ であるから，5^n $(n \geqq 3)$ の倍数はない。

よって　　$c=20+4=24$

14　与えられた等式から　　$pqr(2p-q)(p+10q)=3\times7\times11\times13\times37$　……①

p，q，r は素数であるから，3，7，11，13，37 のいずれかである。

また，$2p-q \geqq 1$ であることがわかる。

もし $2p-q=1$ であるとすると，これを満たすのは $p=7$，$q=13$ のときだけである。

このとき $p+10q=137$ となり，① を満たさない。

よって，$2p-q$ は 3，7，11，13，37 のいずれかであり，更に，

$p+10q \geqq 7+10\cdot3=37$ であるから　　$p+10q=37$

これを満たすのは　　$p=$ ア 7，$q=$ イ 3

このとき，$2p-q=11$ であるから　　$r=$ ウ 13

BASIC問題

1 100から200までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ。

(1)　5かつ8の倍数　　(2)　5または8の倍数

(3)　5で割り切れるが8で割り切れない整数

(4)　5と8の少なくとも一方で割り切れない整数

2 SHOJIの5文字をすべて使用して作成した文字列をアルファベット順の辞書式に並べるとき，JISHOは何番目の文字列であるか。

3 0，1，2，3，4，5，6の7個の数字から異なる4個の数字を取り出して4桁の整数を作るとき，次のような数は何個あるか。

(1)　4桁の整数　　(2)　偶数　　(3)　3200以上

4 正十角形について，次の数を求めよ。

(1)　対角線の本数

(2)　正十角形の頂点のうちの3個を頂点とする三角形の個数

(3)　(2)の三角形のうち，正十角形と1辺だけを共有する三角形の個数

5 正四角錐の5つの面を，赤青黄緑紫の5色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか。

6 $x+y+z=12$ と次の条件を満たす x，y，z の組は，全部で何個あるか。

(1)　x，y，z は負でない整数　　(2)　x，y，z は自然数

Standard問題

7 ATLANTAの7文字を1列に並べるとき，次の問いに答えよ。

(1)　並べ方は，全部で何通りあるか。

(2)　Aが両端にくる並び方は，全部で何通りあるか。

(3)　Tが隣り合わない並び方は，全部で何通りあるか。

8 YOKOHAMAの8文字を横1列に並べて順列を作る。次のような順列は何通りあるか。

(1)　AAとOOという並びをともに含む順列

(2)　Y，K，H，Mがこの順に並ぶ順列

9 NAGOYAJOの8個の文字をすべて並べるとき，次の問いに答えよ。

(1) AAとOOという並びをともに含む順列は何通りあるか。

(2) 同じ文字が隣り合わない順列は何通りあるか。

10 正五角柱の7つの面を，赤，青，黄，緑，黒，紫の6色で塗り分ける。ただし，隣り合う面は異なる色を塗る。また，6色はすべて使う。なお，回転して同じになるものは同じ塗り方とみなす。このとき次の問に答えよ。

(1) 2つの五角形の面を同じ色で塗るような，正五角柱の塗り方は何通りあるか。

(2) 正五角柱の塗り方の総数は何通りあるか。

11 赤玉6個，青玉5個，黄玉1個がある。これらの玉にひもを通して輪をつくる方法は何通りあるか。

12 12人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1) 5人，4人，3人の3つの組に分ける。

(2) A，B，C，Dの4つの組に，3人ずつ分ける。

(3) 3人ずつの4つの組に分ける。

(4) 8人，2人，2人の3つの組に分ける。

13 次の条件を満たす整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数を求めよ。

(1) $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq a_5 \leqq 4$

(2) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leqq 4$，$a_1 \geqq 1$，$a_i \geqq 0$ $(i = 2, 3, 4, 5)$

実戦問題

14 1から10までの自然数の各数字を1つずつ記入した10枚のカードがある。これらをA，B，Cの3つの箱に分けて入れる。

(1) 空の箱があってもよいものとすると，分け方は何通りあるか。

(2) 空の箱があってはならないとすると，分け方は何通りあるか。

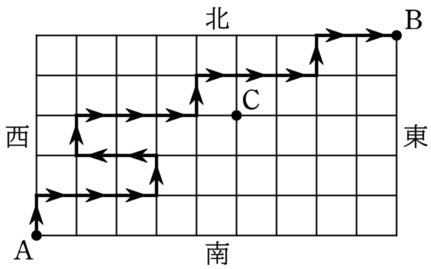
15 正八面体について考える。ただし，回転させて一致するものは同じものとする。

(1) 頂点に1，2，…… と順に番号を付けるとき，番号の付け方は何通りあるか。

(2) 2つの面を赤に，残りの6つの面を白に塗るとき，塗り方は何通りあるか。

(3) 3つの面を赤に，残りの5つの面を白に塗るとき，塗り方は何通りあるか。

16 右の図のように東西に6本，南北に10本の道がある。東西の道と南北の道の出会う地点を交差点とよび，隣どうしの交差点を結ぶ道を区間ということにする。A地点からB地点に進むとき，次の問いに答えよ。ただし，どの交差点においても，東西および北のいずれかに進むことはできるが，南に進むことはできないとする。



また，後戻りもできないとする。図の中の太線は道順の例を示したものである。

(1) A地点からB地点へ行く道順の総数を求めよ。

(2) C地点を通って，A地点からB地点へ行く道順の総数を求めよ。

(3) A地点からB地点まで16区間で行く道順の総数を求めよ。

BASIC問題

1　あるクラス 101 人の中でバナナが好きな人が 43 人，イチゴが好きな人が 39 人，バナナとイチゴ両方が好きな人が 32 人いた。バナナとイチゴがいずれも好きでない人は何人か。

2　命題「$x>2$ ならば，$x^2>4$ である」について，その逆，対偶を下の命題 A，B，C，D から選ぶと，逆は ア$\boxed{}$，対偶は イ$\boxed{}$ である。

A　$x \leqq 2$ ならば，$x^2 \leqq 4$ である。　　B　$x^2 \leqq 4$ ならば，$x \leqq 2$ である。

C　$x^2<4$ ならば，$x<2$ である。　　D　$x^2>4$ ならば，$x>2$ である。

また，命題 A，B，C，D のうち，真であるものは ウ$\boxed{}$ で，他は偽である。

3　2 つの集合 A$=\{2,\ 4,\ 3a^3-2a^2-a-9\}$，B$=\{-4,\ a,\ a^2-2a+5,\ a^2+a+7\}$ の共通部分 A∩B が $\{2,\ 5\}$ であるとき，a の値を求めよ．ただし，a は実数とする．

4　x，y は実数とする．次の $\boxed{}$ にあてはまるものを，下の (a) ～ (d) の中から選べ．

(1)　$x>y$ は，$x^2>y^2$ であるための $\boxed{}$.

(2)　$x^2>y^2$ は，$x^4>y^4$ であるための $\boxed{}$.

(3)　$x+y>2$ は，$x>1$ または $y>1$ であるための $\boxed{}$.

(4)　$x<1$ または $y<1$ は，$x^2+y^2<1$ であるための $\boxed{}$.

(a)　必要条件であるが，十分条件でない
(b)　十分条件であるが，必要条件でない
(c)　必要十分条件である
(d)　必要条件でも十分条件でもない

5　次の命題の否定を作れ。次に，その真偽を判定せよ。

(1)「すべての実数 x，y について $x^2+y^2>0$」

(2)「ある実数 x について $x^2-x+1>0$」

STANDARD問題

6 50人の受験者にA，B，Cの3問よりなる試験を行った結果，Aの正解者は31人，Bの正解者は26人，Cの正解者は25人，A，Bの正解者は16人，A，Cの正解者は12人，B，Cの正解者は15人，A，B，Cの正解者は5人であった。A，B，C3問とも間違えた者は ア$\boxed{}$ 人で，Aのみの正解者は イ$\boxed{}$ 人，A，Bが正解でCを間違えた者は ウ$\boxed{}$ 人である。

7 $a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{8}{a}\right)$ の最小値と，最小値をとるときの ab の値を求めよ。

実戦問題

8 a，b，c がすべて1より小さい正の数のとき，3つの不等式

$$a(1-b)>\frac{1}{4},\quad b(1-c)>\frac{1}{4},\quad c(1-a)>\frac{1}{4}$$

が同時には成り立たないことを示せ。

9 $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ のとき，x，y，z のうち少なくとも1つは1に等しいことを示せ。

10 関数 $f(x)=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)x+(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ を考える。ただし，n は正の整数で，a_1，a_2，……，a_n は実数である。

(1) すべての n に対し，常に $f(x)\geqq 0$ であることを示せ。

(2) $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2\leqq n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ であることを示せ。

(3) $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ であれば，a_1，a_2，……，a_n はすべて等しいことを示せ。