2024/10/28

lr

$\boxed{9}$

$$5人 \xrightarrow{(3)} 3人 \xrightarrow[(2)]{\frac{1}{3}} 1人$$

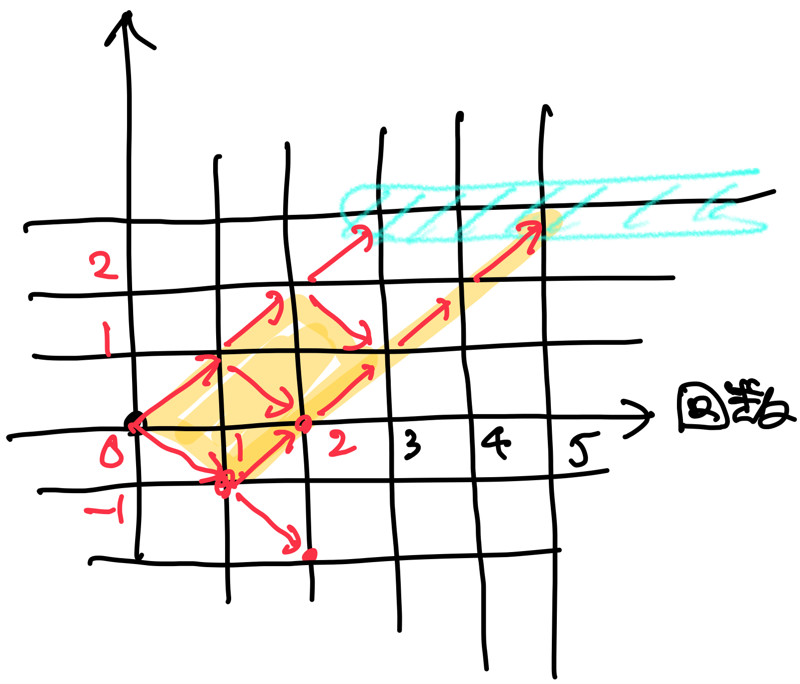
$$5人 \xrightarrow{(3)と同じ} 2人 \longrightarrow 1人$$

$$\frac{{}_2C_1\times 3}{3^2}=\frac{2}{3}$$

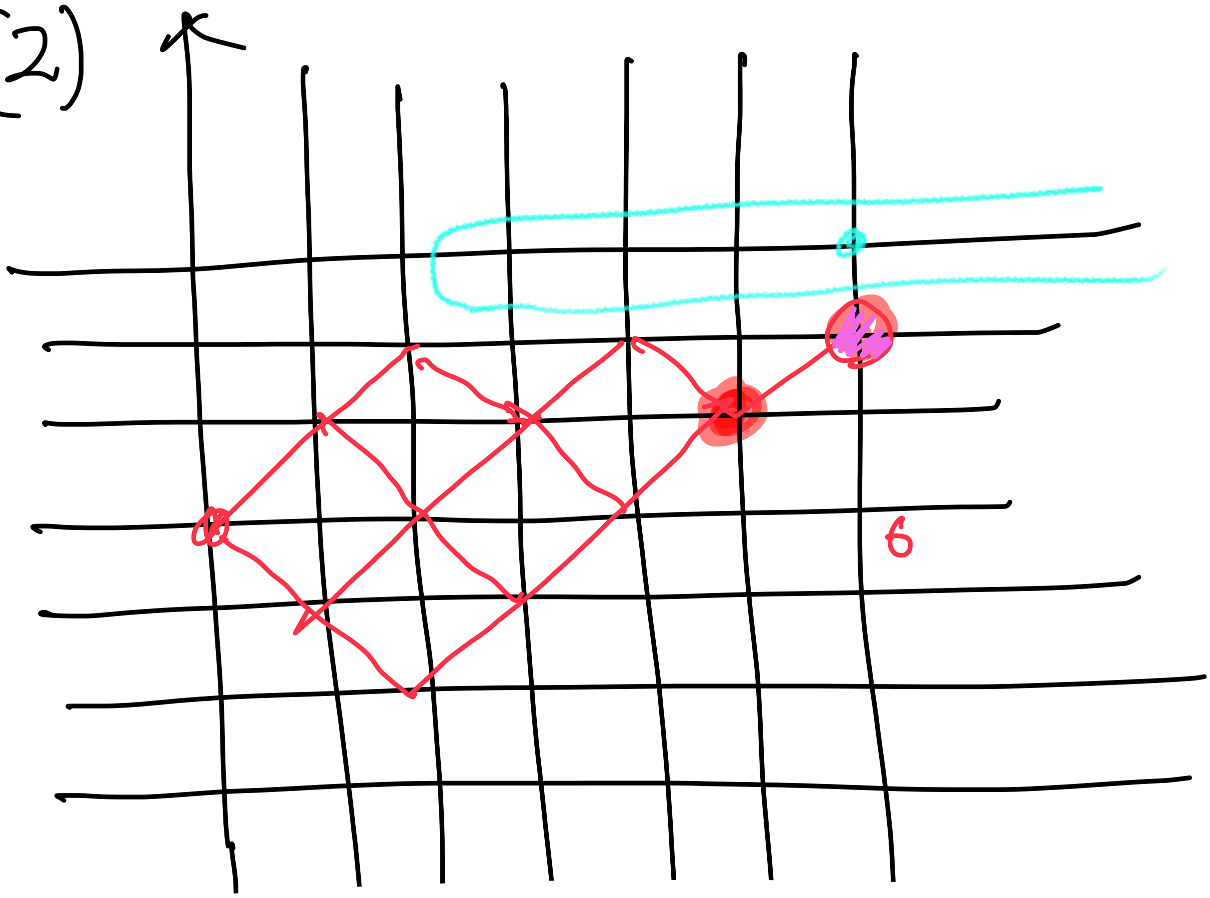
$\boxed{10}$

~~数直線~~

~~数直線~~



(2)



(3) [illegible] 答

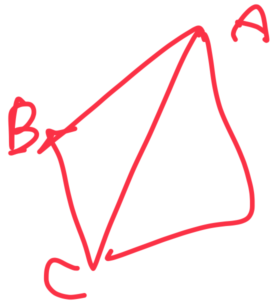
$\boxed{12}$ 求める確率を p_n とおく

メモ
$\lim_{n\to\infty} p_n = 1$
検算につかえる

$p_n = (\text{全事}) - \left(\begin{array}{c}\text{行ってない点がある}\\ B, C, D\end{array}\right)$

$= (\text{全事}) - \left\{ {}_3C_1 \times \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n} + {}_3C_2 \times \boxed{\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}} \right\}$

(AB)　(ABC)
(AC)　(ACD)
(AD)　(ADB)

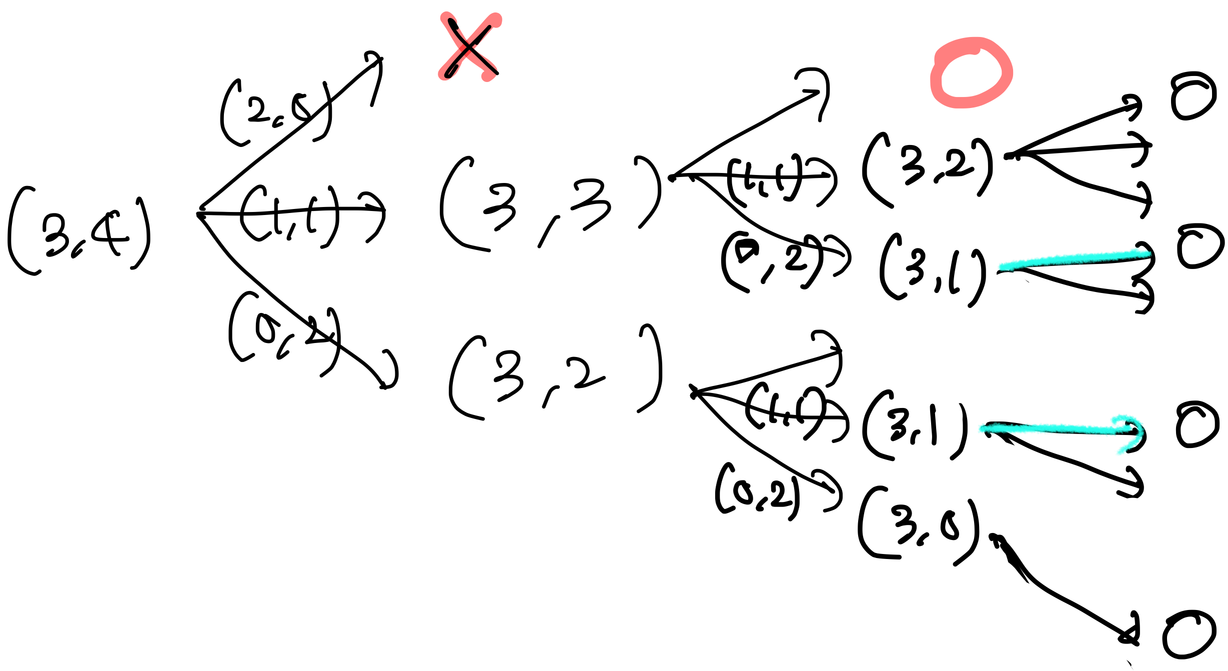


全状況、場確 集

$\boxed{7}$

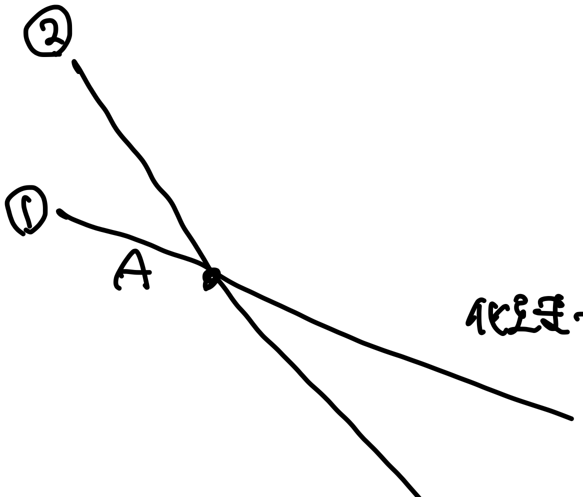
$\begin{pmatrix} B\ 3 \\ W\ 4 \end{pmatrix} \overset{対応}{\Longleftrightarrow} (B, W) = (3, 4)$

B2コ → 終了
(1,1) → Bもどす
(0,2) → もどさない

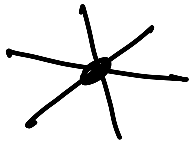


6 3 直線 $x+3y-2=0$ ……①，$x+y=0$ ……②，$ax-2y+4=0$ ……③ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

①,②を連立　$2y-2=0$　$A(-1,1)$



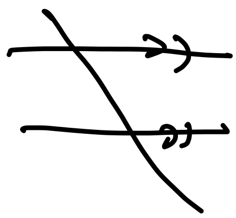
(i) ③に $\overset{A}{(-1,1)}$ 代入　$\underline{a=2}$



傾き$-\frac{1}{3}$　(ii) 平行が存在

③の傾き $\frac{a}{2}$ より

$$\begin{cases} \frac{a}{2}=-\frac{1}{3} \\ \frac{a}{2}=-1 \end{cases}$$



7 点 $(-1,\ 2)$ を通り，x 軸，y 軸に接するような円の方程式を求めよ。

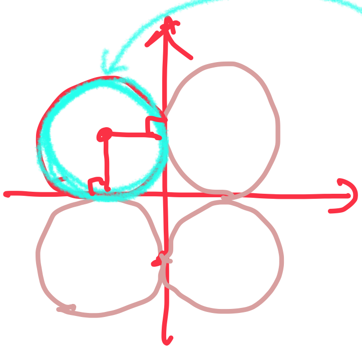
① ②

~~①~~ $x^2+y^2+lx+my+n=0$ に $(-1,2)$ 代入

$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ に

⇓ 方針転換

②



文字設定

半径を r とおくと

中心 $(-r,\ r)$ と表せる

$(x,y)=(-1,2)$ 代入

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

⋮

BASIC問題

$\boxed{1}$ 男子 3 人と女子 2 人がくじ引きで順番を決めて横 1 列に並ぶとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　女子 2 人が隣り合う。　　　　(2)　男女が交互に並ぶ。

$\boxed{2}$ 赤玉と白玉が合わせて 10 個入った袋がある。この袋の中から玉を 3 個同時に取り出すとき，赤玉が出ない確率が $\dfrac{7}{10}$ であるという。袋の中に白玉は何個入っているか。

$\boxed{3}$ 10 本のくじの中に，当たりくじが 3 本入っている。このくじを 3 本同時に引くとき，次の確率を求めよ。

(1)　3 本ともはずれる確率　　　　(2)　少なくとも 1 本は当たる確率

$\boxed{4}$ 3 個のさいころを投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　出た目の最小値が 3 以上である確率

(2)　出た目の最小値が 3 である確率

$\boxed{5}$ A，B 2 社が同じ製品を製造している。A 社は全製品の 60 %，B 社は全製品の 40 % を生産している。また，A 社の製品中には 3 %，B 社の製品中には 6 % の不良品が混じっているという。全製品の中から 1 個を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　それが不良品である確率

(2)　不良品であったときに，それが A 社の製品である確率

Standard問題

$\boxed{6}$ サイコロを続けて4回投げ，1回目，2回目，3回目，4回目に出た目をそれぞれ a，b，c，d とする。次の問に答えよ。

(1) $a<b<c<d$ となる確率を求めよ。

(2) $a\leqq b\leqq c\leqq d$ となる確率を求めよ。

$\boxed{7}$ 箱に 2 個の赤い玉と $(n-2)$ 個の白い玉が入っている $(n=4，5，6，\cdots\cdots)$。

(1)　箱から 3 個の玉を同時に取り出すとき，2 個が白，1 個が赤となる確率 $P(n)$ を求めよ。

(2)　(1) の $P(n)$ が最大になる n を求めよ。

$\boxed{8}$ 硬貨を何回か投げ，先に表が 2 回出ると A の勝ちとし，先に裏が 4 回出ると B の勝ちとするゲームを考える。次の確率を求めよ。

(1)　5 回目に B が勝つ確率　　　　(2)　A，B それぞれの勝つ確率

9 次の確率を求めよ.

(1) 2人でジャンケンをするとき，2回続けてアイコになる確率

(2) 3人で1回ジャンケンをして，1人の勝者が決まる確率

(3) 5人で1回ジャンケンをして，3人の勝者が決まる確率

(4) 5人で1回ジャンケンをして，複数の敗者がでて，複数の勝者が残り，次にその勝者のみで2回目のジャンケンをして，1人の勝者が決まる確率

実戦問題

10 4つのさいころを同時に振るとき，次の確率を求めよ。

(1) 4つとも同じ目が出る確率

(2) 3つのさいころに同じ目が出て，他の1つにはその目と異なる目が出る確率

(3) 2つの異なる目がそれぞれ2つずつ出る確率

(4) 2つのさいころに同じ目が出て，他の2つにはその目と異なりかつ互いに異なる目が出る確率

(5) 連続した4つの自然数の目が出る確率

11 数直線上を点Pが1ステップごとに，$+1$ または -1 だけそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する。数直線上の値が3の点をAとして，PがAにたどり着くと停止する。

(1) Pが原点Oから出発して，ちょうど5ステップでAにたどり着く確率を求めよ。

(2) Pが原点Oから出発して，ちょうど6ステップで値が2の点Bにたどり着く確率を求めよ。

(3) Pが原点Oから出発して，8ステップ以上移動する確率を求めよ。

12 正四面体ABCDを考える。点Pは時刻0では頂点Aに位置し，1秒ごとにある頂点から他の3頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする。このとき，時刻0から時刻 n までの間に，4頂点A，B，C，Dのすべてに点Pが現れる確率を求めよ。ただし，n は1以上の整数とする。

$\boxed{1}$ 解答 (1) $\dfrac{2}{5}$　(2) $\dfrac{1}{10}$

$\boxed{2}$ 解答 9 個

$\boxed{3}$ 解答 (1) $\dfrac{7}{24}$　(2) $\dfrac{17}{24}$

$\boxed{4}$ 解答 (1) $\dfrac{8}{27}$　(2) $\dfrac{37}{216}$

$\boxed{5}$ 解答 (1) $\dfrac{21}{500}$　(2) $\dfrac{3}{7}$

$\boxed{6}$ 解答 (1) $\dfrac{5}{432}$　(2) $\dfrac{7}{72}$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $P(n)=\dfrac{6(n-3)}{n(n-1)}$　(2) $\dfrac{P(n+1)}{P(n)}=\dfrac{n^2-3n+2}{n^2-2n-3}$，$n=5$　(3) $n=5$，6

$\boxed{8}$ 解答 (1) $\dfrac{1}{8}$　(2) 順に $\dfrac{13}{16}$，$\dfrac{3}{16}$

$\boxed{9}$ 解答 (1) $\dfrac{1}{9}$　(2) $\dfrac{1}{3}$　(3) $\dfrac{10}{81}$　(4) $\dfrac{10}{81}$

$\boxed{10}$ 解答 (1) $\dfrac{1}{216}$　(2) $\dfrac{5}{54}$　(3) $\dfrac{5}{72}$　(4) $\dfrac{5}{9}$　(5) $\dfrac{1}{18}$

$\boxed{11}$ 解答 (1) $\dfrac{3}{32}$　(2) $\dfrac{9}{64}$　(3) $\dfrac{91}{128}$

$\boxed{12}$ 解答 $1-3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\boxed{1}$ 5 人全員の並び方は　5! 通り

(1)　女子 2 人を 1 組と考えると，この 1 組と男子 3 人の並び方は　4! 通り

また，1 組にした女子 2 人の並び方は　2 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{4!\times 2}{5!}=\dfrac{2}{5}$

(2)　男女が交互に並ぶのは，男女男女男 となる場合である。

男子 3 人の並び方は　3! 通り，　女子 2 人の並び方は　2 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{3!\times 2}{5!}=\dfrac{2}{5\cdot 4}=\dfrac{1}{10}$

$\boxed{2}$ 白玉が n 個入っているとする。$(1\leqq n\leqq 10)$

起こりうる場合の総数は　${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通り

赤玉が出ない場合は，白玉を 3 個取り出す場合であるから，その総数は　${}_{n}\mathrm{C}_3$ 通り

よって　$\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{7}{10}$

ゆえに　$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{10\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{7}{10}$

したがって　$n(n-1)(n-2)=9\cdot 8\cdot 7$

$1\leqq n\leqq 10$ である自然数のうち，この等式を満たすものは　$n=9$

よって，白玉は 9 個入っている。

$\boxed{3}$ (1)「3 本ともはずれる」という事象を A とする。

くじを 3 本同時に引く方法は　${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$ (通り)

3 本ともはずれる場合は　${}_{7}\mathrm{C}_3=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35$ (通り)

よって　$P(A)=\dfrac{35}{120}=\dfrac{7}{24}$

(2)「少なくとも 1 本は当たる」という事象を B とすると，余事象 $\overline{B}$ は，「3 本とも当たらない」，すなわち「3 本ともはずれる」という事象 A であるから　$P(\overline{B})=P(A)$

よって，求める確率は　$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(A)=1-\dfrac{7}{24}=\dfrac{17}{24}$

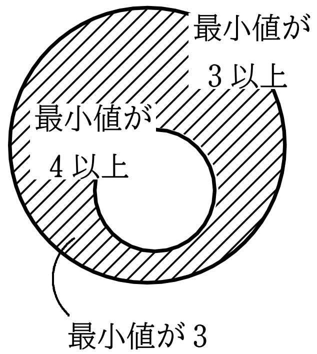
$\boxed{4}$ (1)　出た目の最小値が 3 以上であるのは，3 個とも 3 以上の目が出る場合であるから，求める確率は　$\dfrac{4^3}{6^3}=\dfrac{8}{27}$

(2)　出た目の最小値が 4 以上であるのは，3 個とも 4 以上の目が出る場合である。

このときの確率は　$\dfrac{3^3}{6^3}$

よって，出た目の最小値が 3 である確率は

$$\frac{4^3}{6^3}-\frac{3^3}{6^3}=\frac{37}{216}$$



$\boxed{5}$ A 社の製品であるという事象を A，B 社の製品であるという事象を B，不良品であるという事象を E とする。

このとき，A と B は互いに排反であり

$$P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\ P(B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5},\ P_A(E)=\frac{3}{100},\ P_B(E)=\frac{6}{100}$$

(1)　取り出した 1 個が不良品であるという事象は，次の 2 つの事象の和事象である。

[1]　不良品が A 社の製品の場合

その確率は　$P(A\cap E)=P(A)P_A(E)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{100}=\dfrac{9}{500}$

[2]　不良品が B 社の製品の場合

その確率は　$P(B\cap E)=P(B)P_B(E)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{6}{100}=\dfrac{12}{500}$

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(E)=\frac{9}{500}+\frac{12}{500}=\frac{21}{500}$$

(2)　求める確率は $P_E(A)$ であるから

$$P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{9}{500}\div\frac{21}{500}=\frac{3}{7}$$

6　すべての目の出方は 6^4 通り

(1) $a<b<c<d$ を満たす目の出方は，1〜6から4つの目を選ぶ方法であり，

${}_6C_4=15$ 通り。よって，求める確率は　$\dfrac{15}{6^4}=\dfrac{5}{432}$

(2) $a\leqq b\leqq c\leqq d$ を満たす目の出方は，1〜6の目の出る回数の定め方である。
それは，1, 2, 3, 4, 5, 6 がそれぞれ x，y，z，u，v，w 回出るとすると
$x+y+z+u+v+w=4$　（x，y，z，u，v，w は非負整数）　を満たすような
$(x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w)$ の組数である。これは4つの ◯ を6人で分ける＝5か所で仕切る方法，
つまり◯4つ，｜5つを並べる方法と同じ。

${}_9C_4=126$ 通り。よって，求める確率は　$\dfrac{126}{6^4}=\dfrac{7}{72}$

7　(1)　玉は全部で n 個あるから，3 個の玉の取り出し方は　${}_n\mathrm{C}_3$ 通り。

2 個の白玉と 1 個の赤玉の取り出し方は　${}_{n-2}\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1$（通り）

よって　$P(n)=\dfrac{{}_{n-2}\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_n\mathrm{C}_3}=\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}\times2\div\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=\dfrac{6(n-3)}{n(n-1)}$

(2)　(1) より $P(n+1)=\dfrac{6\{(n+1)-3\}}{(n+1)\{(n+1)-1\}}=\dfrac{6(n-2)}{(n+1)n}$ であるから

$$\frac{P(n+1)}{P(n)}=\frac{6(n-2)}{(n+1)n}\cdot\frac{n(n-1)}{6(n-3)}=\frac{(n-2)(n-1)}{(n+1)(n-3)}=\frac{n^2-3n+2}{n^2-2n-3}$$

$\dfrac{P(n+1)}{P(n)}=1$ となるのは　$n^2-3n+2=n^2-2n-3$　　よって　$n=5$　のとき。

$n^2-3n+2-(n^2-2n-3)=5-n$ であるから

$n=4$ のとき　$n^2-3n+2>n^2-2n-3$，$n=5$ のとき　$n^2-3n+2=n^2-2n-3$，

$n\geqq6$ のとき　$n^2-3n+2<n^2-2n-3$

よって　$\dfrac{P(5)}{P(4)}>1$，$\dfrac{P(6)}{P(5)}=1$，$\dfrac{P(7)}{P(6)}<1$，$\dfrac{P(8)}{P(7)}<1$，……

すなわち　$P(4)<P(5)=P(6)>P(7)>P(8)>\cdots\cdots$

したがって，$P(n)$ が最大となる n は　$n=5$，6

$\boxed{8}$ (1)　4回目までに表が1回，裏が3回出て，5回目に裏が出る場合である。

よって，求める確率は　$_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(2)　Bが勝つのは，4回目に勝つ場合と，5回目に勝つ場合がある。

Bが4回目に勝つのは，裏が4回続けて出る場合であるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

Bが5回目に勝つ確率は，(1)から　$\frac{1}{8}$

よって，Bが勝つ確率は　$\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}$

このゲームに引き分けはないから，Aが勝つ確率は　$1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$

$\boxed{9}$ (1)　2人の1回のジャンケンの手の出し方は 3^2 通り．

1回ジャンケンをしてアイコになる場合は3通り．

よって，1回のジャンケンでアイコになる確率は　$\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$

ゆえに，2回続けてアイコになる確率は　$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(2)　3人のジャンケンの手の出し方は 3^3 通り．

勝者の決まり方は $_3C_1$ 通りであり，勝者の手の出し方は3通りであるから，1人の勝者が決まる場合は $_3C_1\times3$ 通り．

ゆえに　$\frac{_3C_1\times3}{3^3}=\frac{1}{3}$

(3)　5人のジャンケンの手の出し方は 3^5 通り．

勝者の決まり方は $_5C_3$ 通りであり，勝者の手の出し方は3通りであるから，3人の勝者が決まる場合は $_5C_3\times3$ 通り．

ゆえに　$\frac{_5C_3\times3}{3^5}=\frac{10}{81}$

(4)　[1]　1回目の勝者が3人で，2回目に1人の勝者が決まる確率は，(2)，(3)から

$$\frac{10}{81}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{243}$$

[2]　1回目の勝者が2人となる確率は　$\frac{_5C_2\times3}{3^5}=\frac{10}{81}$

残った2人から1人の勝者が決まる確率は　$\frac{_2C_1\times3}{3^2}=\frac{2}{3}$

ゆえに，1回目の勝者が2人で，2回目に1人の勝者が決まる確率は

$$\frac{10}{81}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{243}$$

[1]，[2] から　$\frac{10}{243}+\frac{20}{243}=\frac{30}{243}=\frac{10}{81}$

10　4 つのさいころの目の出方は，全部で　6^4 通り

(1)　4 つとも同じ目が出る場合は，

(1，1，1，1)，(2，2，2，2)，……，(6，6，6，6)

の 6 通りある。

よって，求める確率は　$\frac{6}{6^4}=\frac{1}{216}$

(2)　同じ目が出る 3 つのさいころを選ぶ方法は　${}_4C_3=4$ (通り)

その目の選び方は　6 通り

そのおのおのについて，残り 1 つのさいころの目の出方は　5 通り

よって，求める確率は　$\frac{4\times6\times5}{6^4}=\frac{5}{54}$

(3)　2 つの異なる目を選ぶ方法は　${}_6C_2=15$ (通り)

選んだ 2 つの目のうち一方の目が出る 2 つのさいころの選び方は　${}_4C_2=6$ (通り)

よって，求める確率は　$\frac{15\times6}{6^4}=\frac{5}{72}$

(4)　同じ目が出る 2 つのさいころを選ぶ方法は　${}_4C_2=6$ (通り)

その目の選び方は　6 通り

そのおのおのについて，残り 2 つのさいころの目の出方は　${}_5P_2=5\cdot4=20$ (通り)

よって，求める確率は　$\frac{6\times6\times20}{6^4}=\frac{5}{9}$

(5)　連続した 4 つの自然数となる目の組合せは

(1，2，3，4)，(2，3，4，5)，(3，4，5，6)

の 3 通りがあり，目の出方はこの各組の順列であるから　${}_4P_4\times3=4!\times3$ (通り)

よって，求める確率は　$\frac{4!\times3}{6^4}=\frac{1}{18}$

11 (1)　右の図のように，ステップの数を横軸に，点 P の数直線上の値を縦軸にとったとき，点 P が

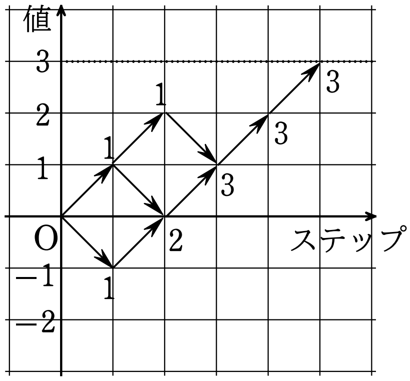
$+1$ だけ進むことは ↗，

-1 だけ進むことは ↘

が対応する。

ちょうど 5 ステップで値が 3 の点 A にたどり着くのは図の実線の経路を通る場合で，全部で

3 通り



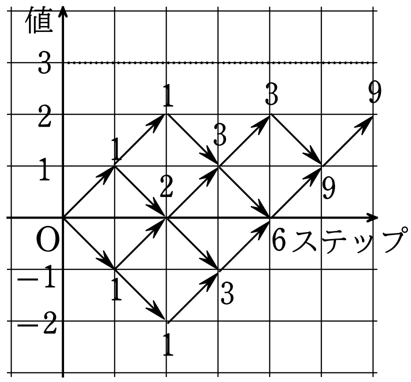
1 つの経路を通る確率は $\dfrac{1}{2^5}$ であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2^5}\times 3=\frac{3}{32}$$

(2)　ちょうど 6 ステップで値が 2 の点 B にたどり着くのは，5 ステップで値が 1 の点にたどり着いている場合である。

この場合の数は，右の図から全部で

9 通り



よって，求める確率は

$$\frac{1}{2^6}\times 9=\frac{9}{64}$$

(3)　8 ステップ以上移動する事象は，7 ステップ以下で A にたどり着く場合の余事象である。

A にたどり着くのはステップが奇数回のときであるから，7 ステップ以下なら次の [1] ～ [3] のいずれかになる。

[1]　3 ステップで A にたどり着く。

$+1$ が 3 回続く場合であるから，この確率は　$\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$

[2]　5 ステップで A にたどり着く。

この確率は (1) から　$\dfrac{3}{32}$

[3]　7 ステップで A にたどり着く。

6 ステップで値が 2 の点にたどり着いているから，この確率は (2) から

$$\frac{9}{64}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{128}$$

以上から，求める確率は　$1-\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{32}+\dfrac{9}{128}\right)=\dfrac{91}{128}$

12 時刻 1 で点 B，C，D に動く確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$

時刻 1 で点 B に動く場合，時刻 n までの間に 4 頂点のすべてに点 P が現れる確率は

$$\begin{aligned}
&1-(\text{C または D に行かない確率})\\
&=1-\{(\text{C に行かない確率})+(\text{D に行かない確率})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -(\text{C にも D にも行かない確率})\}\\
&=1-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=1-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

時刻 1 で点 C，D に動く場合も，時刻 n までの間に 4 頂点のすべてに点 P が現れる確率は同じである。

以上から，求める確率は　$\frac{1}{3}\cdot\left\{1-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\times 3=1-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

テーマ演習｜オイラーの多面体定理

$\boxed{1}$ 正多面体は，正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の 5 種類以外にないことを，オイラーの多面体定理を用いて証明せよ。

$\boxed{2}$ 正二十面体は，各面がすべて合同な正三角形であり，1 つの頂点に 5 つの面が集まっているから，頂点の数は $\boxed{\text{キク}}$ である。よって，オイラーの多面体定理により，辺の数は $\boxed{\text{ケコ}}$ である。

テーマ演習｜オイラーの多面体定理

$\boxed{1}$ 正多面体の頂点，辺，面の数を，それぞれ v，e，f とする。

正多面体の各面を正 m 角形 (m は 3 以上の整数) とすると，各面は m 個ずつの辺をもつから，f 個の正 m 角形では mf 個の辺をもつことになるが，1 つの辺は 2 つの面に共有されているから　$mf=2e$　すなわち　$f=\dfrac{2e}{m}$　…… ①

次に，1 つの頂点に集まる辺の数を n (n は 3 以上の整数) とすると，v 個の頂点には nv 個の辺が集まることになるが，各辺には両端の 2 頂点が対応するから

$nv=2e$　すなわち　$v=\dfrac{2e}{n}$　…… ②

①，② をオイラーの多面体定理 $v-e+f=2$ に代入すると

$\dfrac{2e}{n}-e+\dfrac{2e}{m}=2$　　よって　$e=\dfrac{2mn}{2(m+n)-mn}$　…… ③

$e>0$，$2mn>0$ であるから　$2(m+n)-mn>0$

ゆえに　$mn-2(m+n)<0$　…… (*)　$mn-2(m+n)+4<4$

よって　$(m-2)(n-2)<4$

$m\geqq 3$，$n\geqq 3$ の範囲の整数で，この不等式を満たす m，n の値は右の表のようになる。

$m-2$	1	1	1	2	3
$n-2$	1	2	3	1	1
m	3	3	3	4	5
n	3	4	5	3	3

また，この m，n の値に対応する e，v，f の値は，③，②，① に代入して

[1]　$m=3$，$n=3$ のとき　$e=6$，$v=4$，$f=4$

[2]　$m=3$，$n=4$ のとき　$e=12$，$v=6$，$f=8$

[3]　$m=3$，$n=5$ のとき　$e=30$，$v=12$，$f=20$

[4]　$m=4$，$n=3$ のとき　$e=12$，$v=8$，$f=6$

[5]　$m=5$，$n=3$ のとき　$e=30$，$v=20$，$f=12$

ゆえに，[1] は正四面体，[2] は正八面体，[3] は正二十面体，[4] は正六面体，
[5] は正十二面体　である。

よって，正多面体には，これらの 5 種類以外にはない。

別解　n 個の正 m 角形が 1 つの頂点に集まるとする。

正 m 角形の 1 つの内角の大きさは　$\dfrac{(m-2)\times 180^\circ}{m}$

1 つの頂点に集まる角の和は 360° より小さいから　$n\cdot\dfrac{(m-2)\times 180^\circ}{m}<360^\circ$

ゆえに　$n(m-2)<2m$　　よって　$2(m+n)-mn>0$

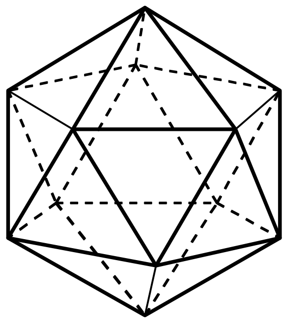
すなわち　$mn-2(m+n)<0$　(*) と同じ不等式が得られ，以後は同じとなる。

$\boxed{2}$　正二十面体の面の数は20，1つの面の頂点の数は3，1つの頂点に集まる面の数は5であるから，頂点の数は$\dfrac{20\cdot 3}{5}=12$

辺の数をxとすると，オイラーの多面体定理により　$12-x+20=2$

　よって　$x=30$

別解　正二十面体の面の数は20，1つの面の辺の数は3，1つの辺に集まる面の数は2であるから，辺の数は　$\dfrac{20\cdot 3}{2}=30$



$\boxed{\text{BASIC問題}}$

$\boxed{1}$ 2 点 A (-3)，B (5) について，次のものを求めよ。

(1)　2 点 A，B 間の距離

(2)　線分 AB を 3：1 に内分，外分する点の座標

(3)　線分 AB の中点

$\boxed{2}$ 次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(6,\ -1)$ を通り，直線 $2x-y+4=0$ に平行な直線，垂直な直線

(2)　点 $(-2,\ 3)$ を通り，直線 $5x+2y-3=0$ に平行な直線，垂直な直線

(3)　点 $(1,\ -1)$ を通り，2 点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線に平行な直線，垂直な直線

$\boxed{3}$ (1)　2 点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2)　3 点 $(3,\ 1)$，$(6,\ -8)$，$(-2,\ -4)$ を通る円の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ k を定数とする。点 $(2,\ 1)$ から直線 $kx+y+1=0$ へ下ろした垂線の長さが $\sqrt{3}$ となるように，k の値を定めよ。

$\boxed{\text{STANDARD問題}}$

$\boxed{5}$ 直線 $3x-4y-1=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 A $(2,\ 5)$ と対称な点を B，点 A から ℓ に下ろした垂線と ℓ との交点を H とするとき，次のものを求めよ。

(1)　点 B の座標　　　　(2)　点 H の座標

$\boxed{6}$ 3 直線 $x+3y-2=0$ ……①，$x+y=0$ ……②，$ax-2y+4=0$ ……③ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 点 $(-1,\ 2)$ を通り，x 軸，y 軸に接するような円の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$ 円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ と直線 $ax+y+a=0$ が異なる 2 点 A，B で交わる。

(1)　$a=-1$ のとき，弦 AB の長さを求めよ。

(2)　弦 AB の長さが最大となるとき，定数 a の値を求めよ。

そく
束

$\boxed{9}$ 2 つの円 $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ ……①，$x^2+y^2-2x-2y=0$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1)　2 つの円 ①，② は異なる 2 点で交わることを示せ。

(2)　2 つの円 ①，② の 2 つの交点と点 $(4,\ 0)$ を通る円の方程式を求めよ。

$(\quad)+k(\quad)=0$

実戦問題

10 座標平面上に 2 点 A$(-2,\ 3)$，B$(0,\ 1)$ と放物線 $y=x^2-8x+15$ がある。点 P が放物線上の $1 \leqq x \leqq 7$ の範囲を動くとき，△PAB の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

11 点 P$(7,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=25$ に引いた 2 本の接線の接点を A，B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ。

12 円 $x^2+y^2=4$　…… ① と円 $(x-5)^2+y^2=1$　…… ② の共通接線の方程式を求めよ。

数学②　第３回試練　図形と式１

$\boxed{1}$ 解答 (1) 8　(2) 内分 3，外分 9　(3) 1

$\boxed{2}$ 解答 (1) 平行：$2x-y-13=0$，垂直：$x+2y-4=0$

(2) 平行：$5x+2y+4=0$，垂直：$2x-5y+19=0$

(3) 平行：$x-2y-3=0$，垂直：$2x+y-1=0$

$\boxed{3}$ 解答 (1) $(x-4)^2+(y-1)^2=10$　(2) $x^2+y^2-6x+8y=0$

$\boxed{4}$ 解答 $k=-4\pm\sqrt{15}$

$\boxed{5}$ 解答 (1) $\left(\frac{28}{5},\ \frac{1}{5}\right)$　(2) $\left(\frac{19}{5},\ \frac{13}{5}\right)$

$\boxed{6}$ 解答 $a=-2,\ -\frac{2}{3},\ 2$

$\boxed{7}$ 解答 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$，$(x+5)^2+(y-5)^2=25$

$\boxed{8}$ 解答 (1) $2\sqrt{3}$　(2) $a=-\frac{1}{3}$

$\boxed{9}$ 解答 (1) 略　(2) $x^2+y^2-10x-6y+24=0$

$\boxed{10}$ 解答 $\left(\frac{7}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$

$\boxed{11}$ 解答 $7x+y=25$

$\boxed{12}$ 解答 $3x\pm4y=10$，$x\pm2\sqrt{6}\,y=10$

$\boxed{1}$ (1)　$\mathrm{AB}=|5-(-3)|=|8|=8$

(2)　3：1 に内分する点の座標は　$x=\dfrac{1\cdot(-3)+3\cdot5}{3+1}=\dfrac{12}{4}=3$

3：1 に外分する点の座標は　$x=\dfrac{-1\cdot(-3)+3\cdot5}{3-1}=\dfrac{18}{2}=9$

(3)　$x=\dfrac{-3+5}{2}=1$

$\boxed{2}$ (1)　$2x-y+4=0$ から　$y=2x+4$

よって，与えられた直線の傾きは　2

[1]　平行な直線の方程式は

$$y-(-1)=2(x-6)\quad \text{すなわち}\quad 2x-y-13=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$$2m=-1\qquad \text{よって}\qquad m=-\frac{1}{2}$$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$$y-(-1)=-\frac{1}{2}(x-6)\quad \text{すなわち}\quad x+2y-4=0$$

(2)　$5x+2y-3=0$ から　$y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$

よって，与えられた直線の傾きは　$-\dfrac{5}{2}$

[1]　平行な直線の方程式は

$$y-3=-\frac{5}{2}\{x-(-2)\}\quad \text{すなわち}\quad 5x+2y+4=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{5}{2}m=-1\qquad \text{よって}\qquad m=\frac{2}{5}$$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$$y-3=\frac{2}{5}\{x-(-2)\}\quad \text{すなわち}\quad 2x-5y+19=0$$

(3)　2 点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{1-(-5)}{8-(-4)}=\dfrac{1}{2}$

[1]　平行な直線の方程式は

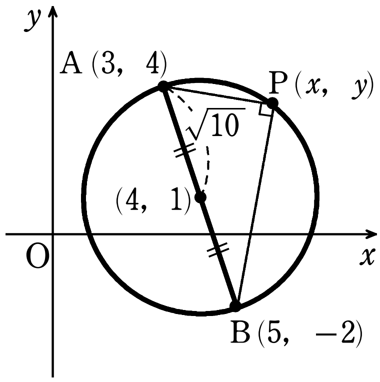
$$y-(-1)=\frac{1}{2}(x-1)\quad \text{すなわち}\quad x-2y-3=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$$\frac{1}{2}m=-1\qquad \text{よって}\qquad m=-2$$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$$y-(-1)=-2(x-1)\quad \text{すなわち}\quad 2x+y-1=0$$



$\boxed{3}$ (1)　この円の中心は，2 点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を結ぶ線分の中点であるから，その座標は　$(4,\ 1)$

半径 r は中心 $(4,\ 1)$ と円上の点 $(3,\ 4)$ との距離であるから　$r^2=(4-3)^2+(1-4)^2=10$

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-1)^2=10$$

(2)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 $(3,\ 1)$ を通るから　$3^2+1^2+3l+m+n=0$

点 $(6,\ -8)$ を通るから　$6^2+(-8)^2+6l-8m+n=0$

点 $(-2,\ -4)$ を通るから　$(-2)^2+(-4)^2-2l-4m+n=0$

整理すると　$3l+m+n+10=0$

$6l-8m+n+100=0$

$2l+4m-n-20=0$

これを解いて　$l=-6$，$m=8$，$n=0$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-6x+8y=0$

$\boxed{4}$ 題意を満たすための条件は　$\dfrac{|k\cdot 2+1+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$

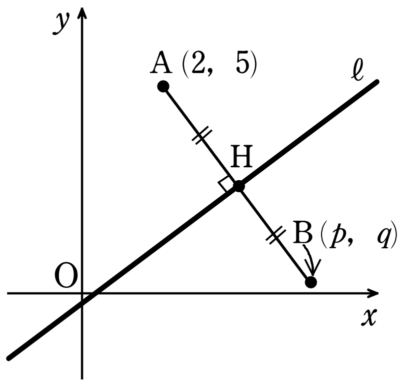
よって　$2|k+1|=\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}$

この両辺は負でないから，2 乗しても同値である。

ゆえに　$4(k+1)^2=3(k^2+1)$

整理して　$k^2+8k+1=0$

したがって　$k=-4\pm\sqrt{15}$



$\boxed{5}$ (1)　点 B の座標を $(p,\ q)$ とする。

[1]　直線 ℓ の傾きは $\dfrac{3}{4}$，直線 AB の傾きは $\dfrac{q-5}{p-2}$ である。

$\mathrm{AB}\perp\ell$ であるから

$$\frac{q-5}{p-2}\cdot\frac{3}{4}=-1$$

すなわち　　$4p+3q=23$　…… ①

[2]　線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+2}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$3\cdot\frac{p+2}{2}-4\cdot\frac{q+5}{2}-1=0$$

すなわち　　$3p-4q=16$　…… ②

①，② を連立して解くと　　$p=\dfrac{28}{5}$，$q=\dfrac{1}{5}$

したがって，点 B の座標は　　$\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

(2)　点 H は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{2+\frac{28}{5}}{2},\ \frac{5+\frac{1}{5}}{2}\right)\quad\text{すなわち}\quad\left(\frac{19}{5},\ \frac{13}{5}\right)$$

$\boxed{6}$ 直線 ① の傾きは $-\dfrac{1}{3}$，　直線 ② の傾きは -1，　直線 ③ の傾きは $\dfrac{a}{2}$

3 直線 ①，②，③ が三角形を作らないのは，次の [1]，[2]，[3] の場合である。

[1]　2 直線 ①，③ が平行　　　[2]　2 直線 ②，③ が平行

[3]　3 直線 ①，②，③ が 1 点で交わる。

[1] の場合　　$-\dfrac{1}{3}=\dfrac{a}{2}$　　　よって　$a=-\dfrac{2}{3}$

[2] の場合　　$-1=\dfrac{a}{2}$　　　よって　$a=-2$

[3] の場合　　①，② を連立して解くと　$x=-1$，$y=1$

よって，直線 ①，② の交点の座標は　　$(-1,\ 1)$

点 $(-1,\ 1)$ が直線 ③ 上にあるから　　$a\cdot(-1)-2\cdot1+4=0$

整理して　　$-a+2=0$　　　ゆえに　$a=2$

このとき，直線 ③ は $x-y+2=0$ となり，直線 ①，② とは一致しない。

したがって，求める a の値は　　$a=-2,\ -\dfrac{2}{3},\ 2$

$\boxed{7}$　円の中心は第２象限にあるので，半径を r とおくと中心の座標は $(-r,\ r)$ と表せる。

よって，求める円の方程式は　$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

この円が点 $(-1,\ 2)$ を通るから　$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$

式を整理して　　$r^2-6r+5=0$

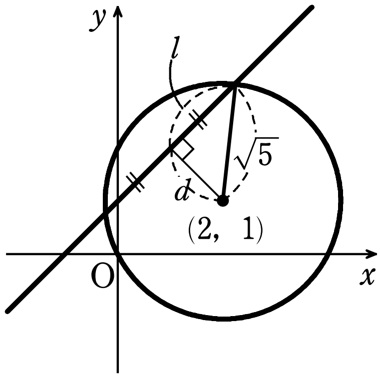
$(r-1)(r-5)=0$ より　　$r=1,\ 5$

したがって，求める円の方程式は

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1,\ (x+5)^2+(y-5)^2=25$$

$\boxed{8}$ (1)　$x^2+y^2-4x-2y=0$ を変形すると

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5 \quad \cdots\cdots ①$$



$a=-1$ のとき，直線の方程式は

$$x-y+1=0 \quad \cdots\cdots ②$$

円 ① の中心 $(2,\ 1)$ と直線 ② の距離 d は

$$d=\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

円 ① の半径は $\sqrt{5}$ であるから，弦 AB の長さを $2l$

とすると　　$l^2=(\sqrt{5})^2-d^2=5-2=3$

$l>0$ であるから　　$l=\sqrt{3}$　　　よって　　$\mathrm{AB}=2l=2\sqrt{3}$

別解　② から　　$y=x+1$

これを $x^2+y^2-4x-2y=0$ に代入して　　$x^2+(x+1)^2-4x-2(x+1)=0$

よって　　$2x^2-4x-1=0$　$\cdots\cdots$ ③

円と直線の交点 A，B の座標を $(\alpha,\ \alpha+1)$，$(\beta,\ \beta+1)$ とすると，α，β は２次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{4}{2}=2,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

よって　　$\mathrm{AB}^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+1)-(\alpha+1)\}^2=2(\beta-\alpha)^2=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

$$=2\left\{2^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=12$$

$\mathrm{AB}>0$ であるから　　$\mathrm{AB}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(2)　弦 AB の長さが最大になるのは，弦 AB が円の直径になるときである。

このとき，直線 $ax+y+a=0$ は円の中心 $(2,\ 1)$ を通るから

$$2\cdot a+1+a=0 \qquad よって \quad a=-\frac{1}{3}$$

$\boxed{9}$ (1)　① を変形すると　　$(x-3)^2+(y-2)^2=1$

よって，円 ① の中心は点 $(3,\ 2)$，半径は 1 である。

② を変形すると　　$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

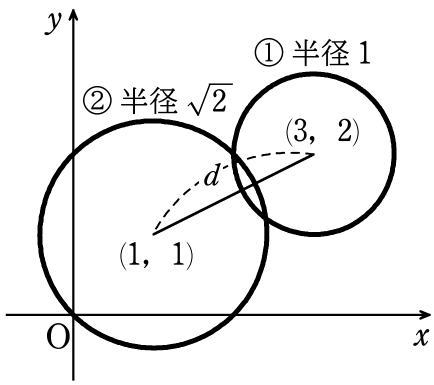
よって，円 ② の中心は点 $(1,\ 1)$，半径は $\sqrt{2}$ である。

2 つの円 ①，② の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

ゆえに　　$\sqrt{2}-1<d<\sqrt{2}+1$

したがって，2 つの円 ①，② は異なる 2 点で交わる。



(2)　k を定数として，方程式

$$x^2+y^2-6x-4y+12+k(x^2+y^2-2x-2y)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

を考える。

(1) により，2 つの円 ①，② は 2 点で交わり，③ は 2 つの円 ①，② の 2 つの交点を通る図形を表す。

図形 ③ が点 $(4,\ 0)$ を通るとき　　$4+8k=0$　　　よって　$k=-\dfrac{1}{2}$

これを ③ に代入して整理すると　　$x^2+y^2-10x-6y+24=0$

これが求める円の方程式である。

$\boxed{10}$ (1)　$\mathrm{P}(t,\ t^2-8t+15)$ とする。

直線 AB の方程式は

$$y=\frac{1-3}{0-(-2)}\{x-(-2)\}+3$$

すなわち　$y=-x+1$

点 P と直線 $y=-x+1$ の距離を d とすると

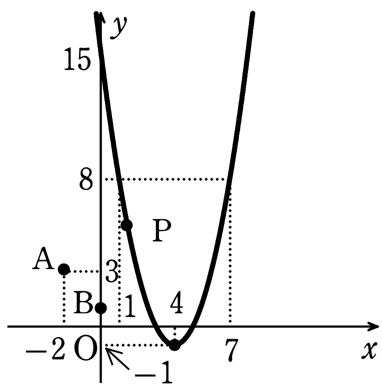
$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times d$$

ゆえに，d が最小となるように P を定めればよい。

$$d=\frac{|t+t^2-8t+15-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|t^2-7t+14|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|$$

よって，d は $t=\dfrac{7}{2}$ で最小となる。

したがって　　$\mathrm{P}\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$



11 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ とすると，A，B における接線の方程式は，それぞれ

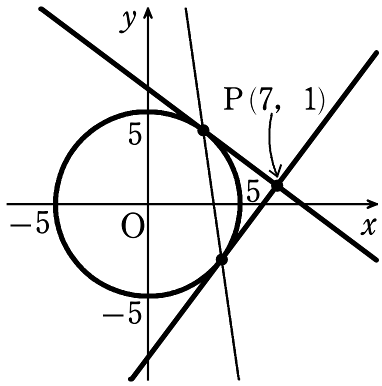
$$x_1x+y_1y=25,\quad x_2x+y_2y=25$$

これらがともに点 P(7，1) を通るから

$$7x_1+y_1=25\ \cdots\cdots ①,\quad 7x_2+y_2=25\ \cdots\cdots ②$$

①，② から，2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ は直線 $7x+y=25$ 上にある。

よって，直線 AB の方程式は　　$7x+y=25$



別解　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする。

点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2+y^2=25$ 上にあるから　　$x_1{}^2+y_1{}^2=25$ …… ①

点 $(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は　　$x_1x+y_1y=25$

これが点 P(7，1) を通るから　　$7x_1+y_1=25$

よって　　$y_1=-7x_1+25$ …… ②

② を ① に代入して　　$x_1{}^2+(-7x_1+25)^2=25$

ゆえに　　$50(x_1{}^2-7x_1+12)=0$　　　これを解いて　　$x_1=3,\ 4$

② から　　$x_1=3$ のとき　$y_1=4$，　$x_1=4$ のとき　$y_1=-3$

よって，A，B の座標は　　$(3,\ 4)$，$(4,\ -3)$

したがって，直線 AB の方程式は

$$y-4=\frac{-3-4}{4-3}(x-3)\qquad すなわち\qquad 7x+y-25=0$$

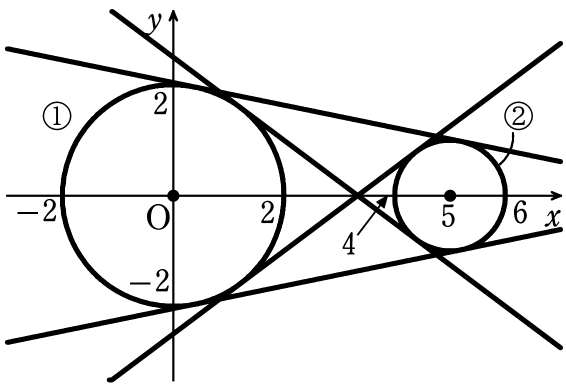
参考　直線 AB を点 P に関する円の **極線** といい，P を **極** という。

12 円 ① 上の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると

$$x_1{}^2+y_1{}^2=4\quad \cdots\cdots ③$$

接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=4\quad \cdots\cdots ④$$



直線 ④ が円 ② に接するとき，円 ② の中心 (5，0) と直線 ④ の距離は円 ② の半径に等しいから　　$\dfrac{|5x_1-4|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}=1$

③ から　　$|5x_1-4|=2$

これを解いて　　$x_1=\dfrac{6}{5},\ \dfrac{2}{5}$

③ から　$x_1=\dfrac{6}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{8}{5}$，$x_1=\dfrac{2}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$

よって，求める接線の方程式は　　$3x\pm4y=10$，$x\pm2\sqrt{6}\,y=10$

1　次のデータの第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数を求めよ。

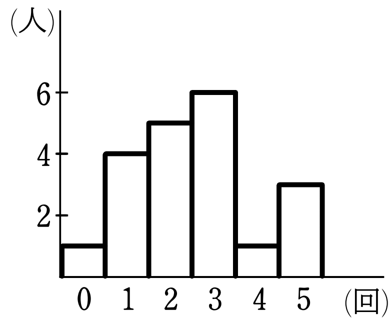
(1)　12，35，47，59，68，73，74，79，87，97

(2)　2，7，10，14，22，33，48，71，84，91，96，98

2　右のヒストグラムは，ある高校の生徒 20 人について，ある 5 日間に校内の売店を利用した回数を調べた結果である。

(1)　利用回数の最頻値，中央値を求めよ。

(2)　利用回数の平均値を求めよ。



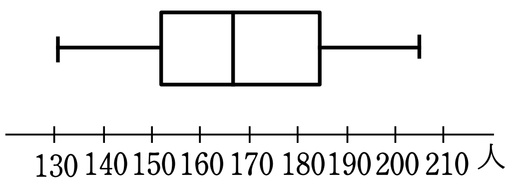
3　次のデータは，ある 10 人の生徒の数学のテストの得点である。ただし，a の値は 0 以上の整数である。

60　74　66　62　82　38　45　41　67　a　(点)

(1)　a の値がわからないとき，このデータの中央値として何通りの値があり得るか。

(2)　このデータの平均値が 60.0 点のとき，このデータの中央値を求めよ。

4　右の図は，ある店の 30 日間にわたる来客数のデータの箱ひげ図である。
この箱ひげ図から読み取れることとして正しいものを，次の ① ～ ③ から 1 つ選べ。



①　来客数 150 人以上 180 人未満のところには，半分以上の日が分布している。

②　来客数が 160 人以上の日が 15 日以上あった。

③　少なくとも 2 日は，来客数が 200 人以上である。

5　次のデータは，あるパズルに挑戦した 10 人について，完成させるまでにかかった時間 x(分) をまとめたものである。ただし，x のデータの平均値を $\overline{x}$ で表し，20 分を超えた人はいなかったものとする。次の問いに答えよ。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
x	13	a	7	3	11	18	7	b	16	3
$(x-\overline{x})^2$	4	c	16	64	0	d	16	1	25	64

(1)　a，b，c，d の値を求めよ。

(2)　x のデータの分散と標準偏差を求めよ。ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ。

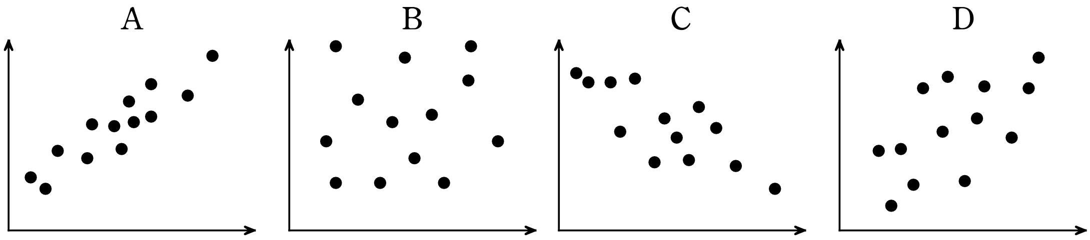
$\boxed{6}$ 下の A ～ D の散布図と対応する相関係数 r の値の組について適当なものを，次の ① ～ ④ の中から選べ。

① A：$r=0.8$　B：$r=0.6$　C：$r=-0.6$　D：$r=0.9$

② A：$r=0.9$　B：$r=0.1$　C：$r=-0.8$　D：$r=0.6$

③ A：$r=0.8$　B：$r=-0.1$　C：$r=0.7$　D：$r=0.7$

④ A：$r=-0.9$　B：$r=-0.1$　C：$r=0.8$　D：$r=0.8$



$\boxed{7}$ 下の表は，10 人の生徒に 30 点満点の 2 種類のテスト A，B を行った得点の結果である。テスト A，B の得点をそれぞれ x，y とするとき，x と y の相関係数 r を求めよ。ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ。

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	29	25	22	28	18	23	26	30	30	29
y	23	23	18	26	17	20	21	20	26	26

$\boxed{8}$ 30 個の値からなるデータがあり，そのうちの 20 個の値の平均値は 7，分散は 5，残り 10 個の値の平均値は 4，分散は 8 である。

(1) このデータ全体の平均値を求めよ。　(2) このデータ全体の分散を求めよ。

$\boxed{9}$ n 個の値の組として与えられている 2 つの変量 X，Y に対し，新たな変量 X'，Y' を $X'=aX+b$，$Y'=cY+d$ (a，b，c，d は定数で，$a \neq 0$，$c \neq 0$) によって定義する。

次の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ⑦ のうちからそれぞれ 1 つずつ選べ。

(1) X' の分散は，X の分散の $\boxed{\text{ア}}$ 倍になる。

(2) X' と Y' の共分散は，X と Y の共分散の $\boxed{\text{イ}}$ 倍である。

(3) X' と Y' の相関係数は，X と Y の相関係数の $\boxed{\text{ウ}}$ 倍である。

⓪ a　① a^2　② ac　③ $\dfrac{ac}{|ac|}$　④ b　⑤ b^2　⑥ bd　⑦ $|bd|$