2024/11/25

① 文字であるときは「ゼロ割り」に注意

$a=b \;\overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}}\; ax=bx$

$(a-b)x=0$

$a=b$ または $x=0$

$\boxed{\text{等式}}$ ✕ゼロで割る、 △2乗

符号の情報が消える

$\boxed{\text{不等式}}$ 注 正の数でかける ⇒ 大小そのまま

負の数 〃 ⇒ 大小逆転

$\boxed{\text{不等式の両辺ひきざん}}$

$$\begin{array}{rl} & a<b \\ -) & c<d \\ \hline & a-c<b-d \end{array}$$

✕

$$\begin{array}{rl} & a<b \\ +) & -d<-c \\ \hline & a+(-d)<b+(-c) \\ & a-d<b-c \end{array}$$

◎

真偽の判定 (背理法)

① 直接に証明。 間接証明

② 偽の命題 → 反例さがし

③ 包含関係

小 大

条件 p ならば → 条件 q が真なら

←×

前橋 群馬

p は q のための 十分

q は p のための 必要

$x^2+y^2+z^2=0$

【原点中心 半径0の球】

$(x,y,z)=(0,0,0)$ のみ.

過去問めぐり　オイラー多面体定理

【１】2017 聖マリアンナ医科大学　医

次の文章の $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまる適切な式と $\boxed{\text{キ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ に当てはまる適切な数を所定の欄に記入しなさい。また，設問(2)の解答を所定の欄に記入しなさい。

(1)　正 n 角形の一つの内角の大きさを n を用いた式で表すと $\boxed{\text{カ}}\times 180^\circ$ となる。各面が正 n 角形の正多面体において，一つの頂点に集まる面の数を m とする。このとき，$\boxed{\text{カ}}\times 180^\circ \times m < 360^\circ$ となる。これより

$$(n-2)(m-2) < \boxed{\text{キ}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。

(2)　(1)の式①を満たす自然数の組 $(n,\ m)$ をすべて求めよ。

(3)　サッカーボールのような凸多面体があり，その各頂点には 1 枚の正五角形と 2 枚の正六角形が集まっている。この凸多面体の面のうち正五角形は a 枚，正六角形は b 枚である。この多面体の頂点の数 v，辺の数 e を b を用いて表すと

$$v = \boxed{\text{ク}}\, b$$

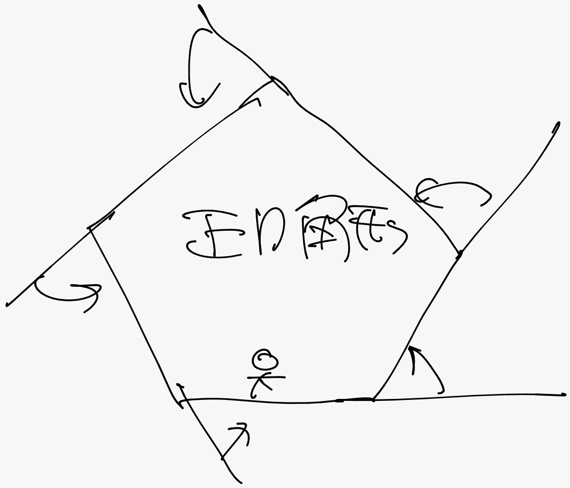
$$e = \boxed{\text{ケ}}\, b$$

となる。また，頂点の数 v は a を用いて

$$v = \boxed{\text{コ}}\, a$$

とも表される。以上より $b = \boxed{\text{サ}}$ となる。

2017 聖2



外角の和は 360°

外角一つは $\frac{360^\circ}{n}$

∴内角一つは $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$

$= 180^\circ\left(1 - \frac{2}{n}\right)$

$= 180^\circ \times \frac{n-2}{n}$ 覚

$\underbrace{\boxed{ア} \times 180^\circ}_{内角} \times \underbrace{m}_{枚数} < 360^\circ$

正n角形

正12面体

$m = 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}$

$\frac{n-2}{n} \times 180^\circ \times m < 360^\circ$ ← (信じて使う)

⇓

$(n-2)(m-2) < 4$

$(m, n) = \boxed{2}$

正n角形, m枚

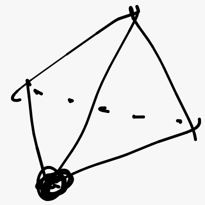
$n \geqq 3$ 　 $m \geqq 3$

$$(n-2)(m-2) = 1, 2, 3$$

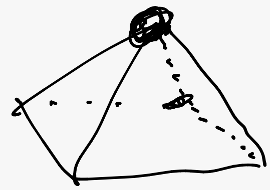
$n-2$	1	1	2	1	3
$m-2$	1	2	1	3	1

n	3	3	3	4	5
m	3	4	5	3	3
	①	②	③	④	⑤

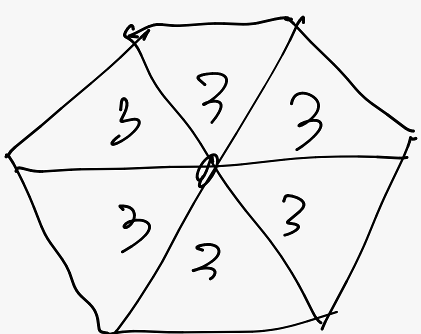
正3が3個 $\longrightarrow$ 正4面体



正3が4個 $\longrightarrow$ 正8面体

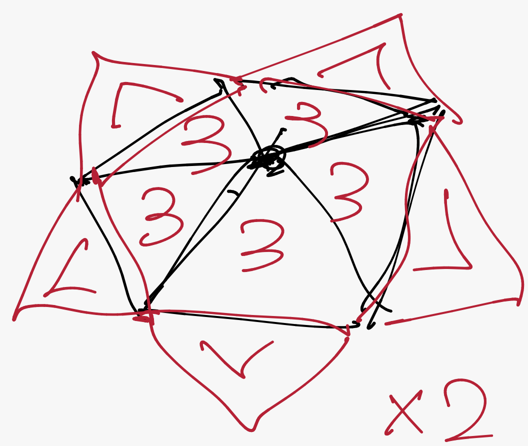


正3が5個 $\longrightarrow$ 正20面体



6個だとペチャンコ

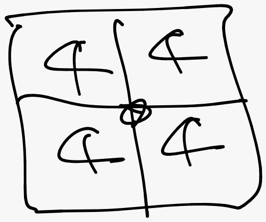
$\longrightarrow$



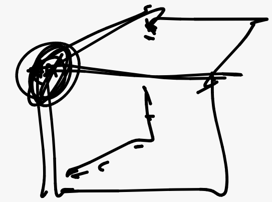
×2

正$\boxed{4}$が3個 ⇒ 正6面体

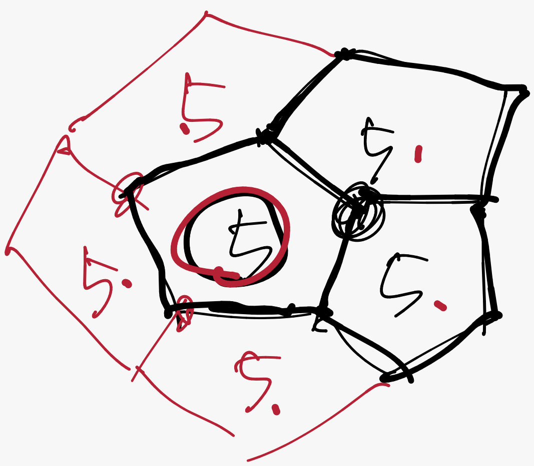
立方体.



4個だとペチャンコ



正5が3個 ⇒



×2

n	4	6	8	12	20
v					
e					
f					

テーマ演習｜オイラーの多面体定理

1 正多面体は，正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の 5 種類以外にないことを，オイラーの多面体定理を用いて証明せよ。

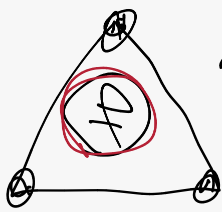
2 正二十面体は，各面がすべて合同な正三角形であり，1 つの頂点に 5 つの面が集まっているから，頂点の数は $\boxed{\text{キク}}$ である。よって，オイラーの多面体定理により，辺の数は $\boxed{\text{ケコ}}$ である。

頂点 vertex
辺 edge
面 face

$v - e + f = 2$

$f = 20$

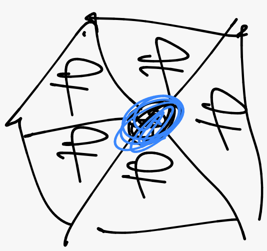
計算
$f \Rightarrow v$



$v = 3f$ じゃない

① 1つの面につき 3頂点

② ただし 1つの頂点は 5つの面に共有されている



$v = \frac{3}{5}f$

よって $v = 12$

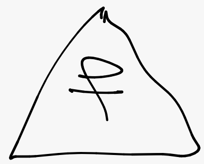
$v - e + f = 2$
12 20

$e = 30$

$$\boxed{\text{読書に}\ \text{[illegible]}}$$

$f \Rightarrow e$

$$e = \boxed{\frac{3}{2}}\, f \qquad f = 20$$



① 1個 → 3日

② 一日は → 2個に

【1】540 以下の自然数のうち，2 でも 3 でも割り切れないものは何個あるか。また，540 との最大公約数が 1 であるものは何個あるか。

[解2] オイラー関数の考え

2の倍数の比率　3の倍数の比率

$$540\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

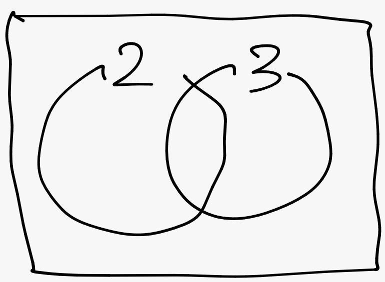
× ○ ◎ ○ × ○

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
					540

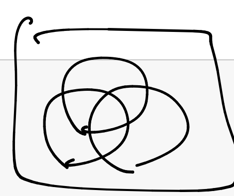
$$=540\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$$

$$=\underline{180}\text{個}$$

[解1] ベン図

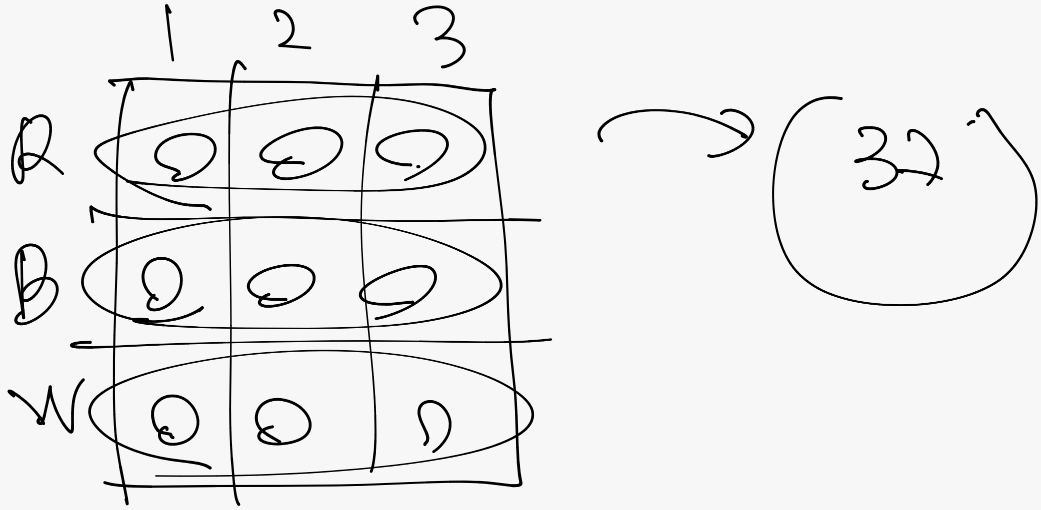


【1】540 以下の自然数のうち，2 でも 3 でも割り切れないものは何個あるか。また，540 との最大公約数が 1 であるものは何個あるか。



$$540\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$=\underbrace{540\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}_{180}\times\frac{4}{5}\quad=\quad\underline{144\text{個}}$$



全体 ${}_9C_3 = 84$

条件 3色 $\dfrac{3^3}{{}_9C_3} = \dfrac{27}{84} = p$

1色 $\dfrac{3}{{}_9C_3} = \dfrac{3}{84} = \boxed{\tfrac{1}{9}}\,p$

2色 $\dfrac{{}_9C_3 - (3+3^3)}{{}_9C_3} = \dfrac{54}{84} = \boxed{2}\,p$

X色	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{9}p$	$2p$	p

$(1,3,3,3)$ $\boxed{4} \times \frac{1}{9}p \times p^3$

$(2\,2\,3\,3)$ $\boxed{6} \times (2p)^2 \times p^2$ $\quad {}_4C_2$

川2番

$\left(\frac{4}{9} + 6 \times 2^2\right) \times p^4$

$24 + \frac{4}{9}$

126

$= \frac{130}{9} p^4$

$$\frac{(15\ldots が\ あa)}{4Aご105\ldots}$$

キーワード•分裂

$\boxed{1}$

二分裂によって増える細胞がある。分裂してから 1 時間ごとに $\dfrac{1}{2}$ の確率で分裂するとする。すなわち，分裂しない場合は，そのまま存続し，1 時間後に $\dfrac{1}{2}$ の確率で分裂する。分裂した場合は，2 つの細胞になり，おのおのが 1 時間後に $\dfrac{1}{2}$ の確率で分裂する。

分裂した直後の細胞が時刻 0 時に 1 個あるとする。したがって，時刻 1 時に細胞が 1 個である確率は $\dfrac{1}{2}$ であり，2 個である確率も $\dfrac{1}{2}$ である。

(1) 時刻 3 時の細胞の数が 3 である確率を求めよ。

(2) n を正の整数とする。時刻 n 時の細胞の数が 2 である確率を求めよ。

(3) 時刻 2 時の細胞の数の期待値を求めよ。

キーワード•分裂

$\boxed{2}$

1分ごとに確率 $p\,(0<p<1)$ で2個に分裂する細胞がある。最初この細胞が2個あるときの，2分後の細胞の個数が3となる確率を $f(p)$ とする。ただし，この分裂はすべて独立に起こるものとする。

(1) $q=1-p$ とする。$f(p)$ を q を用いて表せ。

(2) $f(p)$ を最大にするような p の値を求めよ。

キーワード•分裂

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\dfrac{7}{32}$　　(2)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n}$　　(3)　$\dfrac{9}{4}$ 個

$\boxed{2}$

解答　(1)　$f(p)=2(1-q^2)q^3\quad(0<q<1)$　　(2)　$p=\dfrac{5-\sqrt{15}}{5}$

キーワード・分裂

$\boxed{1}$

(1)　時刻 3 時の細胞の数が 3 になるような分裂のようすを図に表すと，下の図 [1] のようになる。

よって，求める確率は　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{32}$

(2)　時刻 n 時の細胞の数が 2 になるのは，ある時刻 k 時 $(1\leqq k\leqq n)$ に 1 回だけ分裂が起こる場合である。

よって，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}2^{k}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\cdot\frac{2(2^{n}-1)}{2-1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

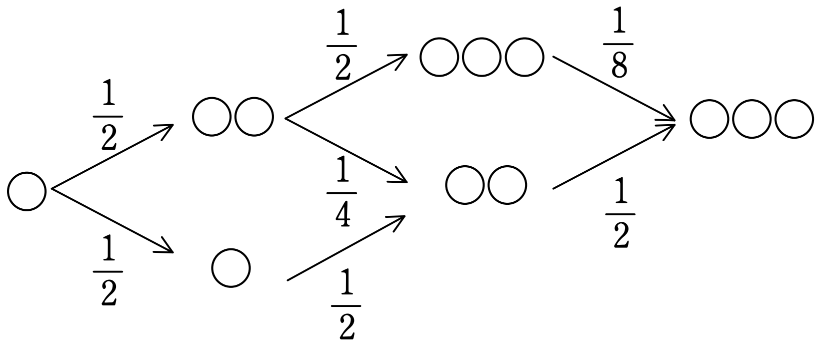
(3)　時刻 2 時までの細胞分裂のようすを図に表すと，下の図 [2] のようになる。

よって，求める期待値は

$$1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$$

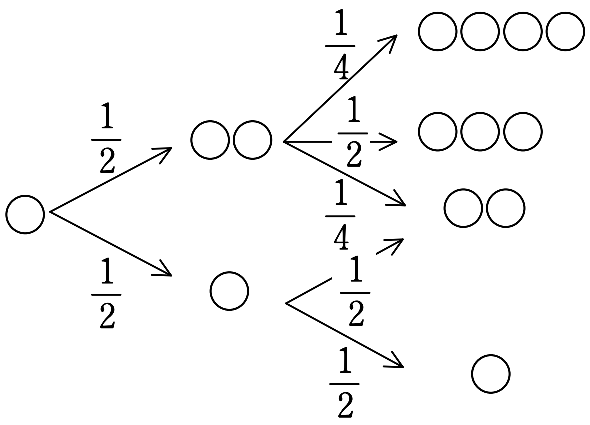
$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}\ (\text{個})$$

[1]



キーワード•分裂

[2]



$\boxed{2}$

(1)　最初の 2 個の細胞を A，B とすると，2 分後の細胞が 3 個になるには次の 4 通りの場合がある。

[1]　1 分後に A だけが 2 個に分裂し，2 分後に分裂はない。

[2]　1 分後に B だけが 2 個に分裂し，2 分後に分裂はない。

[3]　1 分後に分裂はなく，2 分後に A だけが 2 個に分裂する。

[4]　1 分後に分裂はなく，2 分後に B だけが 2 個に分裂する。

[1] ～ [4] の事象は互いに排反であるから

$$\begin{aligned} f(p) &= p(1-p)\cdot(1-p)^3+(1-p)p\cdot(1-p)^3+(1-p)^2\cdot p(1-p)+(1-p)^2\cdot(1-p)p \\ &= pq^4+pq^4+pq^3+pq^3=2pq^3(q+1) \\ &= 2(1-q)q^3(q+1)=2(1-q^2)q^3 \quad (0<q<1) \end{aligned}$$

(2)　$f(p)=g(q)$ とおくと　$g(q)=2q^3-2q^5 \quad (0<q<1)$

よって　$g'(q)=6q^2-10q^4=-2q^2(5q^2-3)$

$g'(q)=0$ とすると　$q^2=0,\ \frac{3}{5}$　　$0<q<1$ であるから　$q=\frac{\sqrt{15}}{5}$

ゆえに，$g(q)$ の増減表は右のようになるから，

$q=\frac{\sqrt{15}}{5}$ のとき $g(q)$ は最大となる。

よって，$p=\frac{5-\sqrt{15}}{5}$ のとき，$f(p)$ は最大となる。

q	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\cdots$	1
$g'(q)$		$+$	0	$-$	
$g(q)$		↗	極大	↘	